数智赋能背景下线性代数教学改革的探索与实践

报告人 姚红梅

哈尔滨工程大学线性代数教学团队

2025年11月15日 福建 龙岩

目录

一、改革背景：时代驱动新使命

（一）中国教育数字化及智能赋能教学发展历程

1. 基础设施构建与多媒体化教学
1990-1999

数字化的雏形：
PPT、Flash动画、视频等。

数字化主要作为教师授课的**演示工具。**

2. “互联网+教育”与在线教育萌芽
2000-2017

数字化里程碑：**网络化教学，**为后来的在线教育、混合式教学铺平了道路。

2003年**国家精品课程资源**网上线，2012年**MOOCs（慕课）平台**如学堂在线、中国大学MOOC快速发展，高等教育资源实现跨校共享。

3. 智能化探索与大规模在线教育实践
2018-2022

2018年**《教育信息化2.0行动计划》**推动从技术应用向融合创新、智能引领转变。

数字化实践：2020疫情下的“停课不停学”。教学中体现“学”的个性化与“评”的智能化。

4. 数智融合与教育新生态构建

2019年5月

国际人工智能与教育大会

习近平总书记在致贺信中对高等教育数字化核心指示，部署 AI 融合教育，驱动变革创新。

2022年2月

《教育部2022年工作要点》

国家启动教育数字化全面行动，第五项第28条明确部署：2022年全面启动教育数字化战略行动。

2023年5月

中共中央政治局第五次集体学习

习近平总书记强调教育数字化是开辟教育新赛道、塑造教育新优势的重要突破口。

2025年1月

教育强国建设规划纲要（2024-2035）

推进高教数字化，资源共享创新教学，技术驱动公平保障。

4月，教育部等九部门《关于加快推进教育数字化的意见》

优化学科布局，提升数智素养，建设智慧平台，促进AI融合，强化校企协同。

（二）人工智能驱动的数智化时代带来的新需求、新挑战与新使命

新需求：**从“计算能力”到“建模思维”**

传统核心是计算与理论证明，注重学生抽象逻辑思维培养；

当前需要学生具备用线性代数工具解决实际问题的能力。

新挑战：**如何解决传统教学的“三脱节”**

理论与应用脱节：学生不清楚抽象概念在实际中的价值

教学与工具脱节：纸笔运算与行业主流计算工具（python/matlab等）分离

学习与创新脱节：止步于知识传授，缺乏激发学生运用知识进行探索与创新环节

新使命：**培养数智时代的复合型、创新型人才**

二、核心举措：线性代数课程数智化进化之路

近30年积累与传承

行动纲领：深耕理论—筑牢数理根基；融入实验—搭建知行桥梁；
强化应用—赋能解决实际问题；引导创新—激发探索前沿潜能

建设历程：

2005年
省精品课建设

2009年
数学软件融入教学
代数与几何相融合
（72学时）

2010年
应用案例库建设
出版案例教材

2016年
新形态教材建设
省教材建设优秀教材（2021）

2017-2018年
慕课资源建设3门
省精品在线开放课程
(2018-2019)

2021年
课程思政建设
省课程思政示范课程(2022)

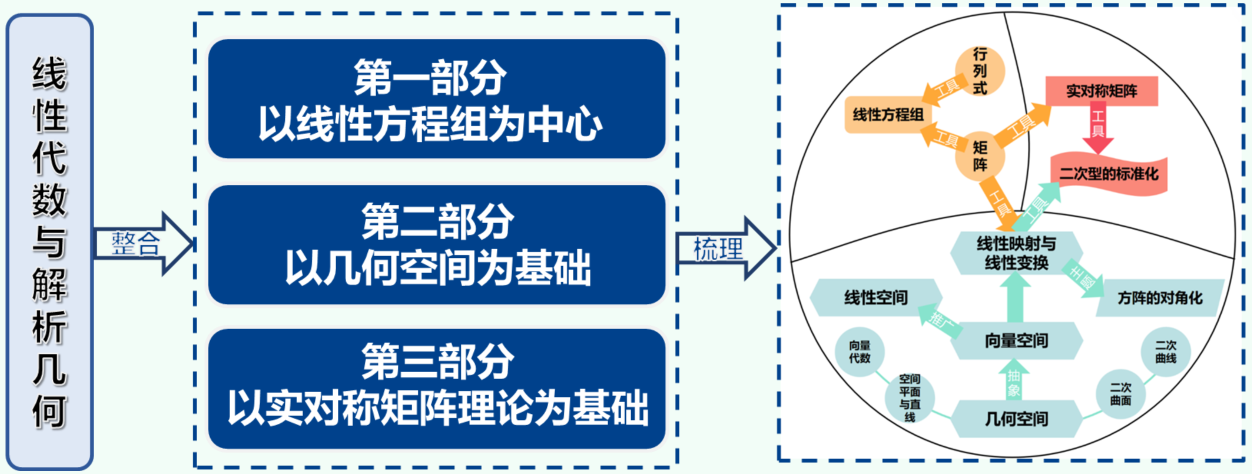
2021年底—至今
新工科教学改革

2022年—至今
知识图谱构建
数智课程应用

2023年
第二批国家级一流本科课程

三、资源重构：支撑课程进化的智能资源建设

（一）知识图谱搭建：知识点 模块化（三大模块，74个知识点、389个节点）



线性代数与解析几何

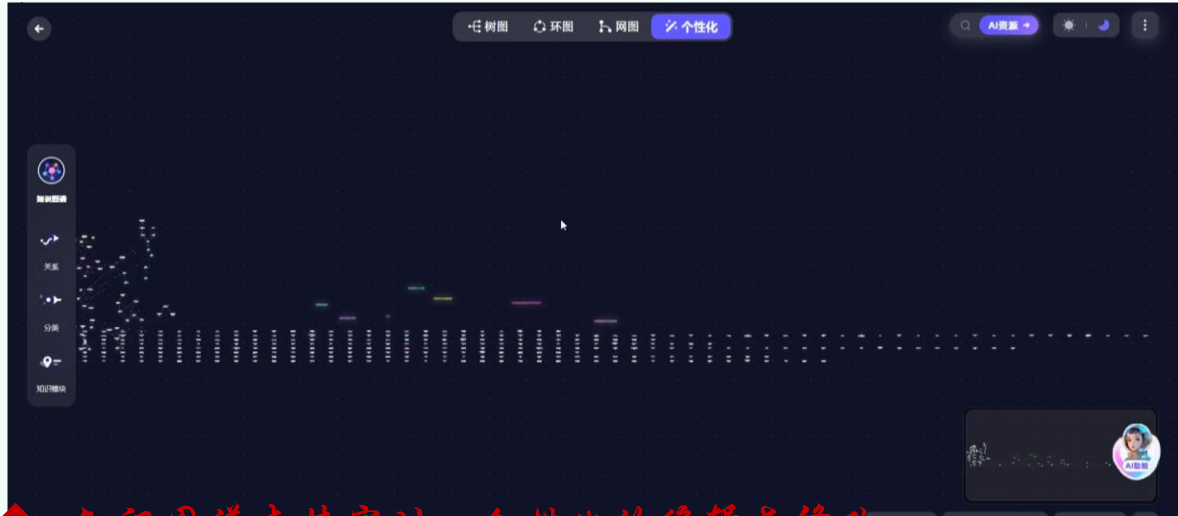
整合

第一部分
以线性方程组为中心

第二部分
以几何空间为基础

第三部分
以实对称矩阵理论为基础

梳理

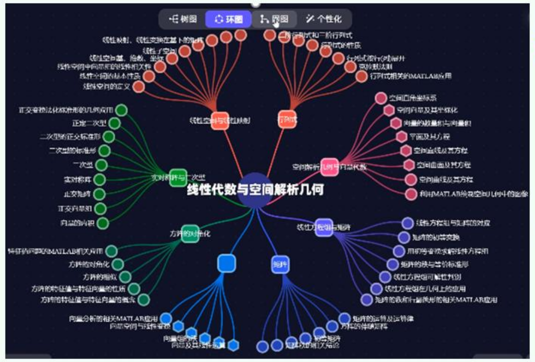


◆ 知识图谱支持实时、个性化的编辑与修改

树状

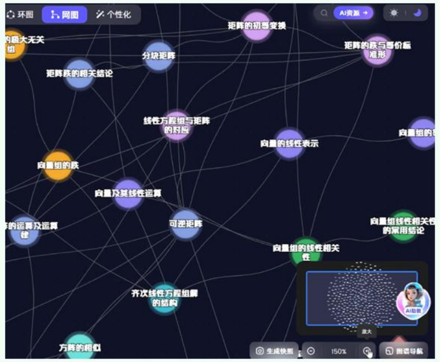
层级分明
主从关系清晰直观

环状



围绕核心
辐射关联一目了然

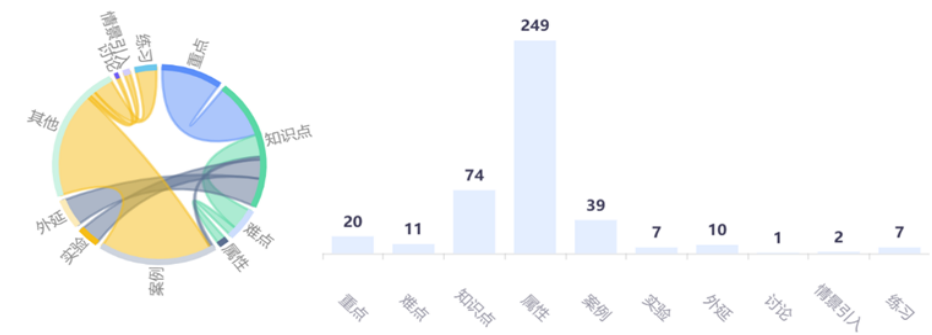
网状



多向交织
复杂联系全域呈现

图谱节点概况

已设置 389 个节点 节点标签分布统计（单位: 个）



实现精准导航与能力洞察

对于n阶方阵A,若存在n阶方阵B满足 $AB = BA = E$ 则称 A 可逆，并将这个唯一的 B 称为 A 的逆阵，记为 A^{-1} .

知识点资源

（二）打造模块化教学资源库

知识点视频资源：与知识图谱节点一一绑定的“微视频” 共389个

省精品在线开放课程 3 门

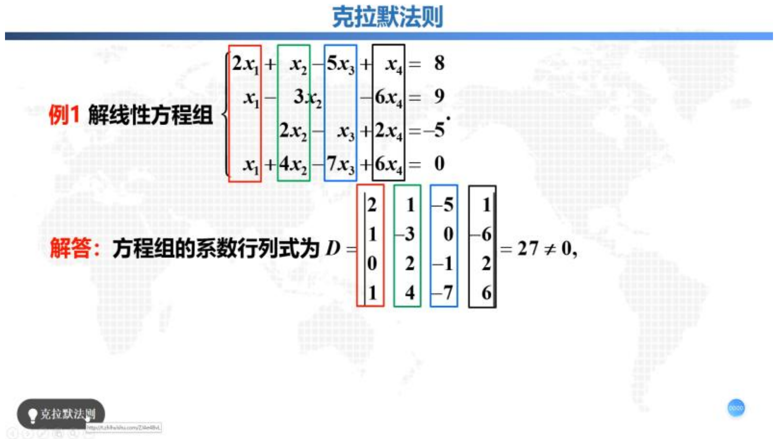
理论教学
实验教学
创新实践

学 → 练 → 用

《线性代数与解析几何》慕课

《线性代数与解析几何典型题》慕课

《线性代数与解析几何案例》慕课



克拉默法则

例1 解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解答： 方程组的系数行列式为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0,$

在数智化背景下，知识图谱赋予了视频资源“灵魂”与“坐标”，而视频资源则成为知识图谱“感知化”与“情境化”的载体。

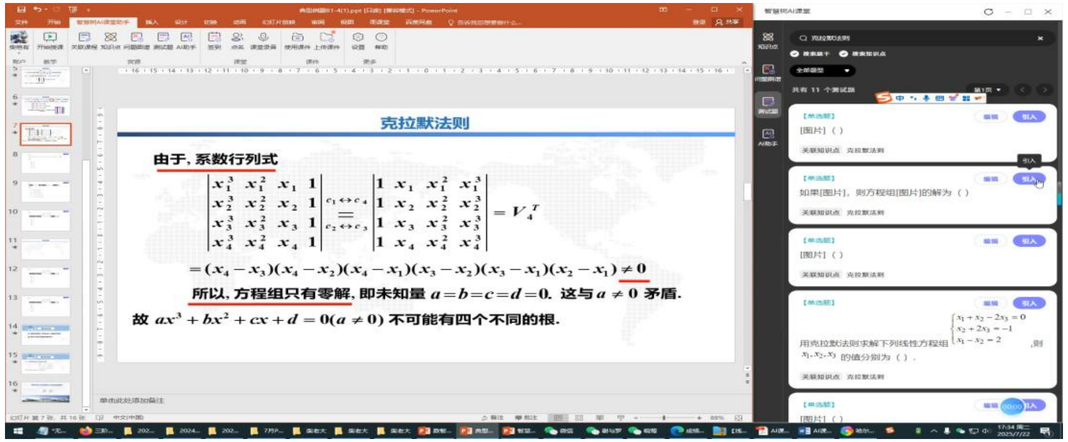
AI试题库：知识点练习题、阶段测试题、期末测试题等，共943道。

标注：

- **1题型**
- **2难度**
- **3测评**
- **4解析**

943 道测试题

85.93% 认知目标覆盖



克拉默法则

由于，系数行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_4}{\underset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = V_4^T$$

$$=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1) \neq 0$$

所以，方程组只有零解，即未知量 $a=b=c=d=0$. 这与 $a \neq 0$ 矛盾.

故 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a \neq 0)$ 不可能有四个不同的根.

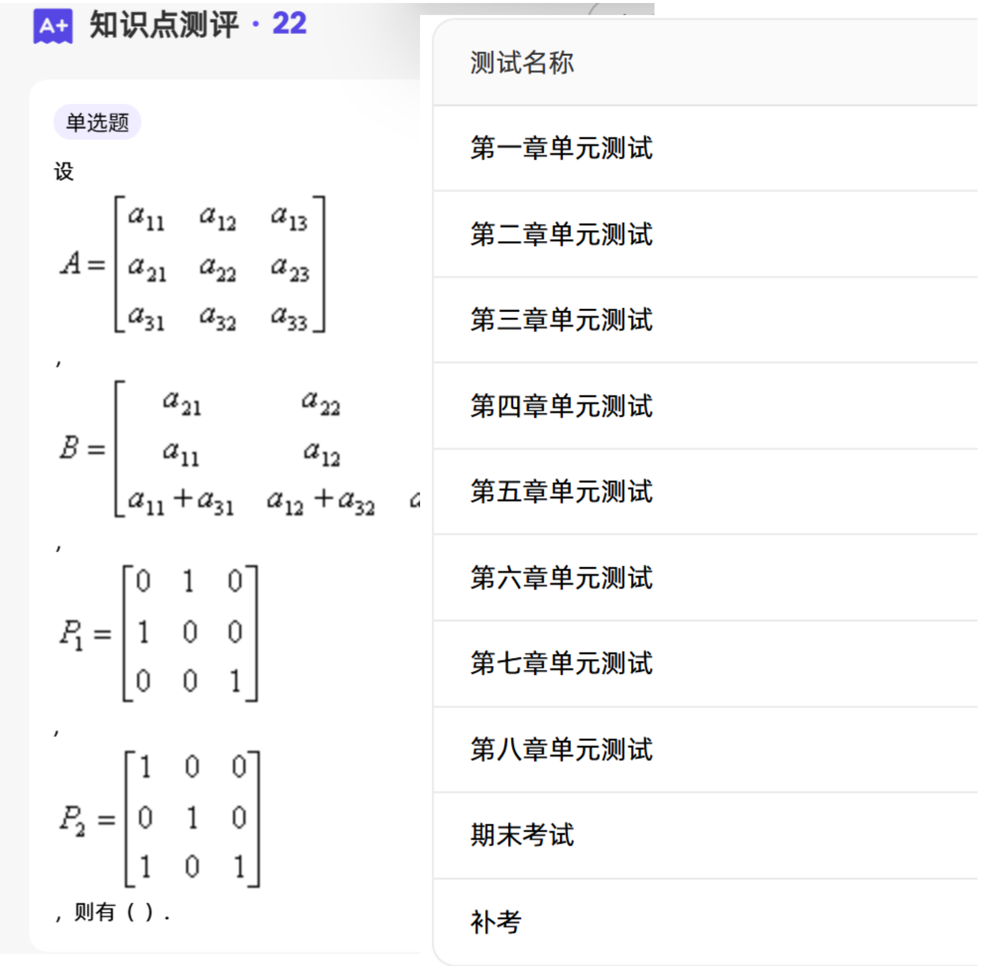
【单选题】
[图片]（ ）
关联知识点 克拉默法则

【单选题】
如果[图片]，则方程组[图片]的解为（ ）
关联知识点 克拉默法则

【单选题】
[图片]（ ）
关联知识点 克拉默法则

【单选题】
用克拉默法则求解下列线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ x_2+2x_3=-1 \\ x_1-x_2=2 \end{cases}$,则 x_1, x_2, x_3 的值分别为（ ）.
关联知识点 克拉默法则

【单选题】
[图片]（ ）



知识点测评 · 22

单选题

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

,

$$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} \end{bmatrix}$$

,

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

,

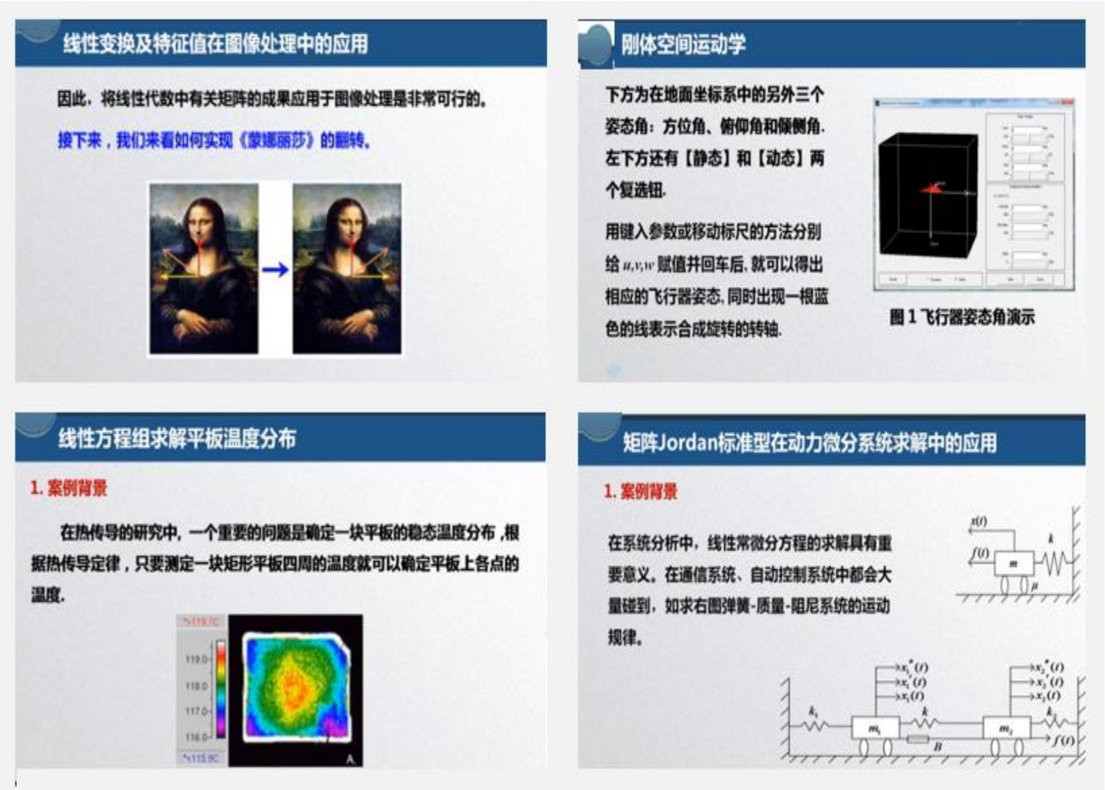
$$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

，则有（ ）.

测试名称
第一章单元测试
第二章单元测试
第三章单元测试
第四章单元测试
第五章单元测试
第六章单元测试
第七章单元测试
第八章单元测试
期末考试
补考

每一道题都关联到图谱中特定的知识点和能力维度，形成精准的“知识点- 试题”映射网络，支撑个性化练习与测评。

应用案例视频资源：录制向专业渗透与融合，提升实践能力、引导探索创新的应用案例视频共47个



线性变换及特征值在图像处理中的应用

因此，将线性代数中有关矩阵的成果应用于图像处理是非常可行的。

接下来，我们来看如何实现《蒙娜丽莎》的翻转。

刚体空间运动学

下方为在地面坐标系中的另外三个姿态角：方位角、俯仰角和倾侧角. 左下方还有【静态】和【动态】两个复选钮.

用键入参数或移动标尺的方法分别给 u,v,w 赋值并回车后, 就可以得出相应的飞行器姿态, 同时出现一根蓝色的线表示合成旋转的转轴.

图 1 飞行器姿态角演示

线性方程组求解平板温度分布

1. 案例背景

在热传导的研究中，一个重要的问题是确定一块平板的稳态温度分布 ,根据热传导定律，只要测定一块矩形平板四周的温度就可以确定平板上各点的温度.

矩阵Jordan标准型在动力微分系统求解中的应用

1. 案例背景

在系统分析中，线性常微分方程的求解具有重要意义。在通信系统、自动控制系统中都会大量碰到，如求右图弹簧-质量-阻尼系统的运动规律。

章节	案例知识点	章节	案例知识点
第1章 行列式	行列式在计算面积和体积上的应用	第5章 向量空间	向量在混凝土配料中的应用
	行列式在实际生活中的应用		向量空间在营养学中的应用
第2章 空间解析几何	求轨迹方程		向量在物理电路中的应用
第3章 线性方程组	经济价格平衡		向量空间在人口中的应用
	线性方程组在多项式插值方面的应用		向量在交通中的应用
	线性方程组在配平化学方程式中的应用		向量在经济体系中的应用
	线性方程组在流量方面的应用		向量在通信中的应用
	营养食谱		向量在问题中的应用
	线性方程组在钢板温度测量上的应用		向量夹角在Inter网络上的应用
第4章 矩阵	矩阵加法和数乘应用		向量空间基在数字通信中的应用
	矩阵乘法的应用	第6章 线性变换和特征值	线性变换和特征值在人口迁徙中的应用
	分块矩阵的应用		线性变换和特征值在生态问题中的应用
	矩阵的逆在保密编译上的应用		线性变换和特征值在国民经济问题中应用
	矩阵计算在航班计算上的应用		线性变换在信号问题中的应用
	矩阵分解在电机工程中的应用		线性变换在金融问题中的应用
	矩阵在建筑工程方面的应用		线性变换在地理问题中的应用
	矩阵在计算机图形方面的应用		线性变换在物理电路问题中的应用
	矩阵在方程求解方面的应用		线性变换在最小二乘问题中的应用

在数智资源重构中，应用案例视频是知识图谱的“血肉”与“灵魂”。它让冰冷的理论知识拥有了温度和价值，将静态的知识网络激活为动态的问题解决沙盘，是培养复合型、创新型人才的核心资源载体。

思政案例资源： 知识模块相关的课程思政元素，并录制课程思政案例视频，发挥思政育人功能

课程知识内容 数学思维、科学精神

教学内容	基本要素或案例
第一章话题 幻方-最早的矩阵	以幻方为案例，引入矩阵和线性代数发展史。 在讲解线性代数整体内容框架时，介绍行列式和矩阵概念的形成与建立过程，特别强调在东汉前期的《九章算术》中已经利用增广矩阵和消元法求解方程组，由此激发学生的民族自豪感和爱国主义精神。
第二章话题 陀螺仪与向量积	以陀螺仪指向的方向为例，引入向量积对应的陀螺方向问题。 在讲解向量积的方向时，通过介绍古代航海时使用的司南，近代航海时使用的陀螺仪，特别是现代中国发展的北斗卫星导航系统，介绍中国科技发展的辉煌与现在国防的强大，激发学生的民族自豪感和时代使命感。
第三章话题 交通拥堵问题的建模与解决方案	以交通问题为例，引入利用矩阵方法的数学建模及求解的过程。 在讲解方程组求解时，以当下人们关注的热点问题—交通拥堵问题为切入点 距 生
第四章话题 建立在矩阵上的体育场-鸟巢	以 在 学 性

第五章话题 化学配方问题	引入减肥配方问题。 在讲解向量的相关性时，将化学配方问题和减肥配方问题引入课堂，让学生注意自身健康，合理搭配饮食，让学生进一步体会，只有好身体才能促进社会的可持续性发展，才能更好地为人民服务，更好地为国家做贡献。
第六章话题 海洋、航空领域中的矩阵	引入在海洋和航空领域中的数学问题。 以特征值和特征向量对应振动问题中的频率和模态函数为例，结合我校“三海一核”的学科特色，阐述线性代数知识在海洋开发和航空航天发展中的重要性，将专业知识与当前国家科技发展相结合，激发学生的爱国热情和实现中国梦的使命感。
话题 问题	以人口和就业的转移问题为例，引入矩阵的对角化问题。 在讲解对角 中，鼓励学 想信念，建
题 —线性空	以德国著名 数字问题， 学生将数学

一、方阵的特征值与特征向量

特征值：eigenvalue

特征向量：eigenvector

Hilbert 的23个数学问题

推动二十世纪数学各分支的发展

希尔伯特—德国数学家

甘于清贫

醉心科学探索

执着追求真理

四、教学实践：数智课程的落地与探索

（一） 总体实践策略

试点先行

- 以南安普顿联合学院全英文线性代数课程数智化作为实践范例（2020-2024）

辐射引领

- 未来学院推广（2022-至今）

全域推广

- 全校其他理工科学院（长期、逐步推进）

体现数智化教学改革对标的是国际一流标准

课程设置、教学模式、评价方式有自主权，且对应新工科前沿领域，数智赋能是必要的

（二） 南安普顿联合学院全英文线性代数课程数智化具体实践介绍

1. 联合学院全英文线性代数改革的必然性

使命驱动

联合学院办学使命： 培养**国际化、复合型、创新型工科人才**。线性代数作为核心基础课，其教学改革直接影响后续专业课程的质量与学生的学术竞争力。

问题切入

全英文线性代数教学存在的问题：

传统教学的“三脱节”：理论与应用、教学与工具、学习与创新。

国际化教学的深层需求：全英文教学不仅是语言转换，更应是教学理念与方法的国际接轨，当前模式仍有提升空间。

因材施教的规模化难题：学生基础与兴趣多元，传统大班课难以满足个性化需求。

2. 联合学院全英文线性代数课程赋能新目标

总体愿景 打造一门 “国际水准、工科特色、学生热爱” 的标杆性全英文线性代数课程。

课程目标 培养学生的数理基础、科学素养和创新能力，为培养有情怀、有担当、有学识的人才提供坚固有力的数学基础平台。

能力目标：从“计算熟练度”转向 “解决复杂工程问题的建模能力”。

素养目标：培养学生的几何直观空间想象能力与数据科学素养；具有高尚的科学观和坚定的理想信念，自觉弘扬和践行社会主义核心价值观 。

国际化目标：提升学生在国际学术语境下，运用数学语言进行交流与协作的能力。

3. 联合学院全英文线性代数课程改革核心方案

（1）国际化借鉴: 南安普顿网站Math资源学习（2020年11月其资源信息网站开放）

工程数学课程

课程信息介绍

知识模块（27个模

预习提纲

讲义

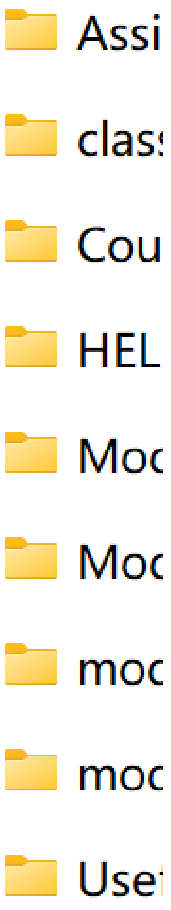
作业

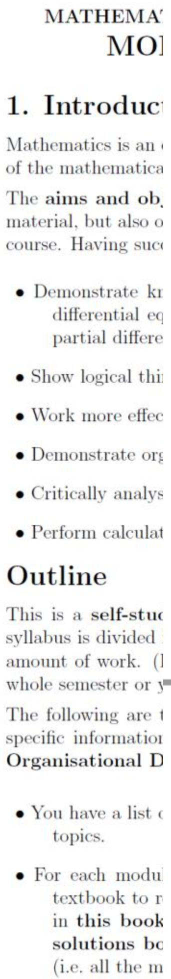
阶段测试题及解答

工程应用案例

教材

（体现了资源数字化）


Assi
class
Cou
HEL
Moc
Moc
moc
moc
Use


MATHEMA
MO

1. Introduc

Mathematics is an
of the mathematica

The **aims and ob**
material, but also o
course. Having suc

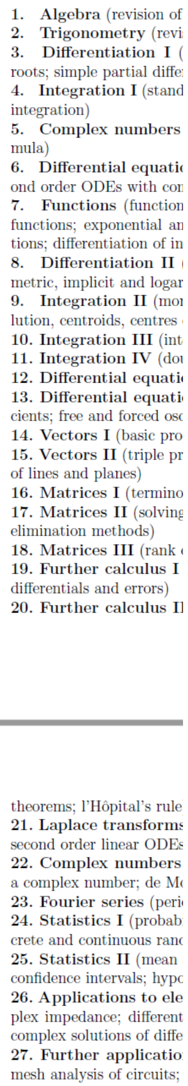
- Demonstrate kı
  differential eq
  partial differe
- Show logical thi
- Work more effec
- Demonstrate org
- Critically analys
- Perform calculat

Outline

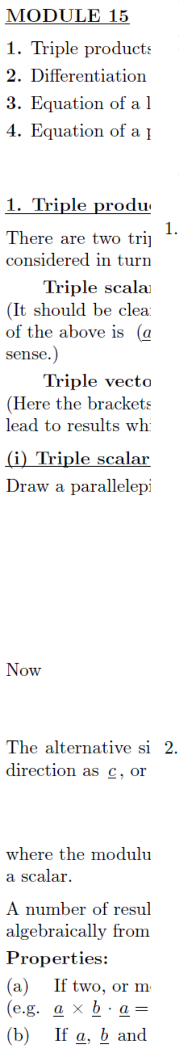
This is a **self-stuc**
syllabus is divided
amount of work. (
whole semester or y

The following are t
specific informatio
Organisational D

- You have a list c
  topics.
- For each modul
  textbook to r
  in **this book**
  solutions bc
  (i.e. all the m


1. **Algebra** (revision of
2. **Trigonometry** (revi
3. **Differentiation I** (
roots; simple partial diffe
4. **Integration I** (stand
integration)
5. **Complex numbers**
mula)
6. **Differential equati**
ond order ODEs with cor
7. **Functions** (function
functions; exponential an
tions; differentiation of in
8. **Differentiation II**
metric, implicit and logar
9. **Integration II** (mor
lution, centroids, centres
10. **Integration III** (int
11. **Integration IV** (dou
12. **Differential equati**
13. **Differential equati**
cients; free and forced osc
14. **Vectors I** (basic pro
15. **Vectors II** (triple pr
of lines and planes)
16. **Matrices I** (termino
17. **Matrices II** (solving
elimination methods)
18. **Matrices III** (rank
19. **Further calculus I**
differentials and errors)
20. **Further calculus II**

theorems; l'Hôpital's rule
21. **Laplace transforms**
second order linear ODEs
22. **Complex numbers**
a complex number; de Mo
23. **Fourier series** (peri
24. **Statistics I** (probab
crete and continuous ranc
25. **Statistics II** (mean
confidence intervals; hypo
26. **Applications to ele**
plex impedance; different
complex solutions of diffe
27. **Further applicatio**
mesh analysis of circuits;


MODULE 15

1. Triple products
2. Differentiation
3. Equation of a l
4. Equation of a p

1. Triple produ

There are two trij
considered in turn

Triple scala
(It should be clea
of the above is ($\underline{a}$
sense.)

Triple vecto
(Here the brackets
lead to results whi

(i) Triple scalar
Draw a parallelepi

1.

Now

The alternative si
direction as $\underline{c}$, or

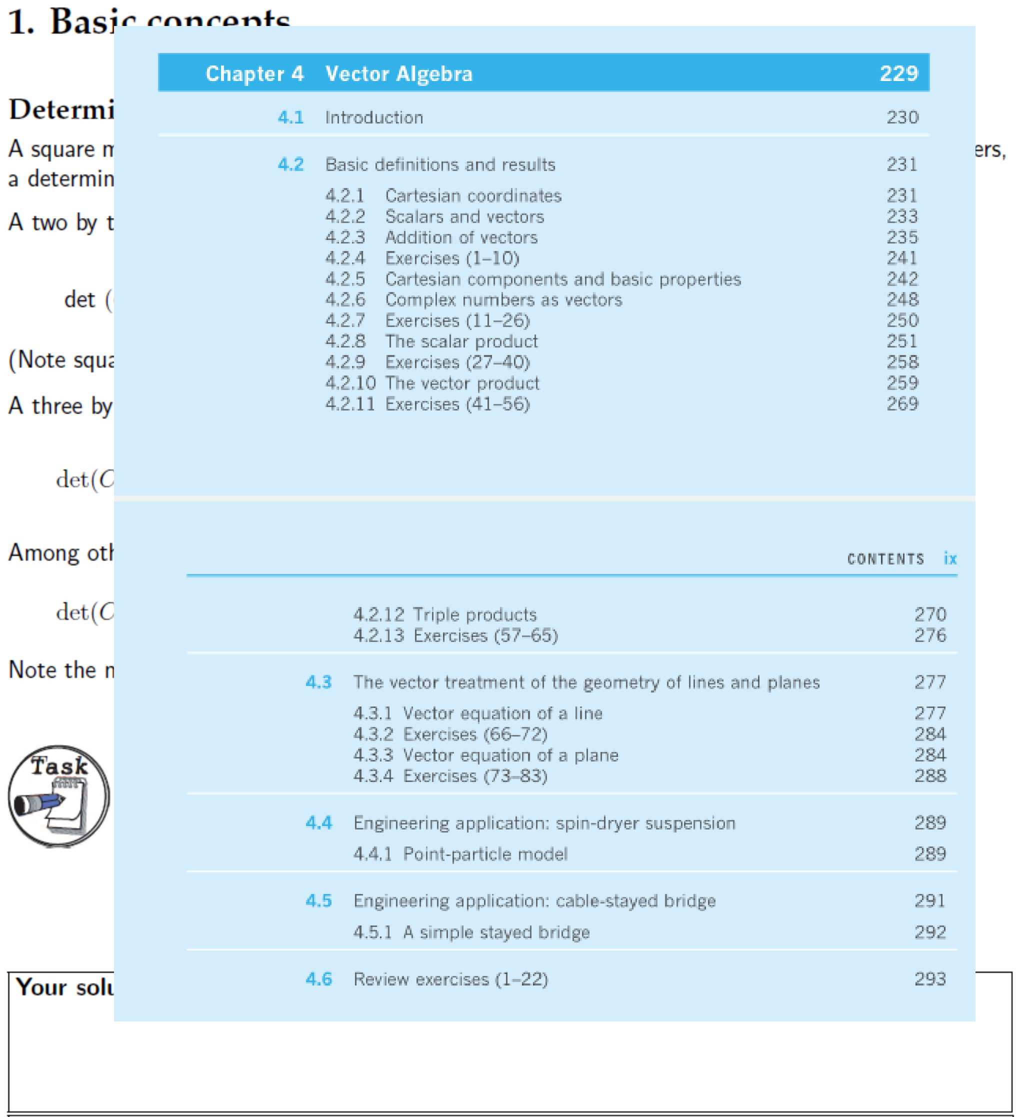
2.

where the modulu
a scalar.

A number of resul
algebraically from

Properties:

(a) If two, or m
(e.g. $\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{a} =$
(b) If $\underline{a}$, $\underline{b}$ and


1. Basic concepts

Determi

A square m
a determin

A two by t

det (

(Note squa

A three by

det(C

Among oth

det(C

Note the n

Task

Your solu

ers,

（1）国际化借鉴: 与本校资源进行对比分析

1 课程目标对比

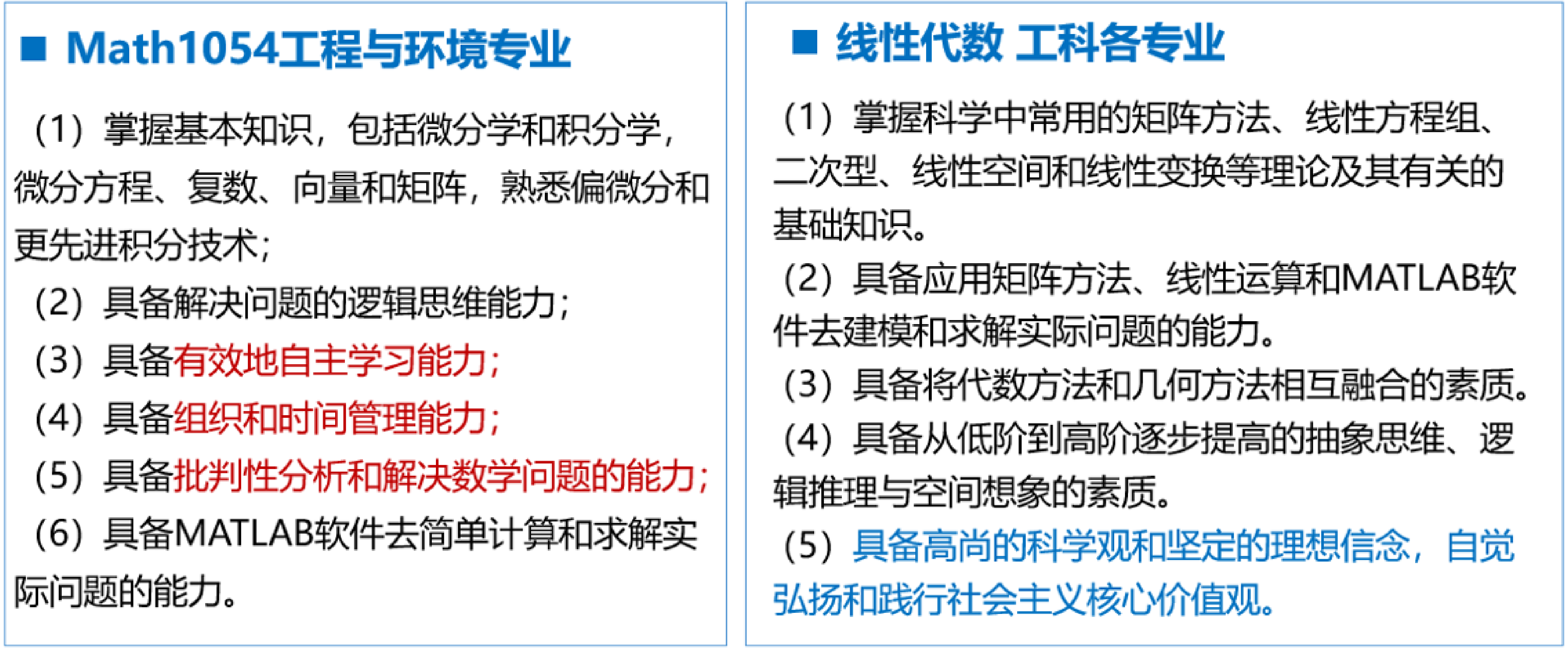
2

2.1

2.2

2.3

2.4



■ Math1054工程与环境专业

（1）掌握基本知识，包括微分学和积分学，微分方程、复数、向量和矩阵，熟悉偏微分和更先进积分技术；

（2）具备解决问题的逻辑思维能力；

（3）具备有效地自主学习能力；

（4）具备组织和时间管理能力；

（5）具备批判性分析和解决数学问题的能力；

（6）具备MATLAB软件去简单计算和求解实际问题的能力。

■ 线性代数 工科各专业

（1）掌握科学中常用的矩阵方法、线性方程组、二次型、线性空间和线性变换等理论及其有关的基础知识。

（2）具备应用矩阵方法、线性运算和MATLAB软件去建模和求解实际问题的能力。

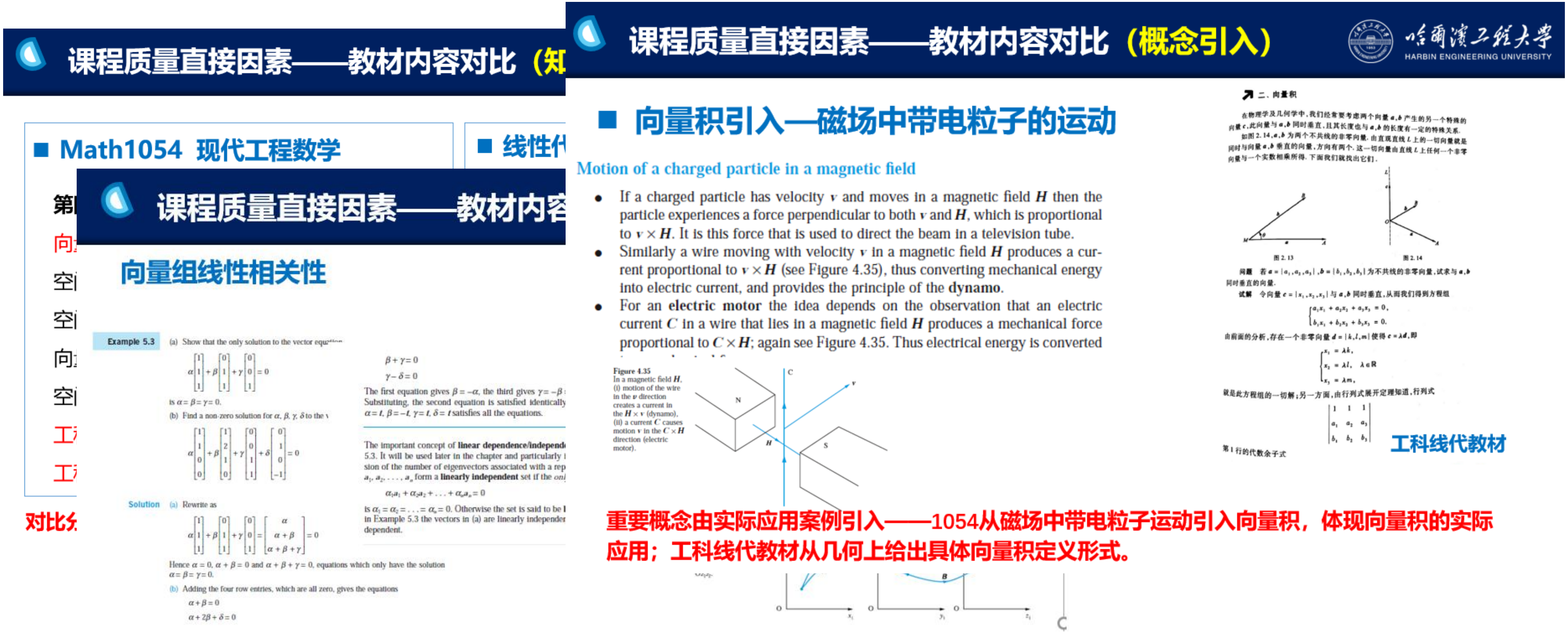
（3）具备将代数方法和几何方法相互融合的素质。

（4）具备从低阶到高阶逐步提高的抽象思维、逻辑推理与空间想象的素质。

（5）具备高尚的科学观和坚定的理想信念，自觉弘扬和践行社会主义核心价值观。

对比分析： 1054 目标培养工程师，注重学生自主学习能力、组织与时间管理能力、批判性思维培养。

中外教材内容对比（共68页PPT 内容）



课程质量直接因素——教材内容对比（知

■ Math1054 现代工程数学

■ 线性代

第

向

空

空

向

空

工

工

对比分

课程质量直接因素——教材内容

向量组线性相关性

Example 5.3 (a) Show that the only solution to the vector equation

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

is $\alpha=\beta=\gamma=0$.

(b) Find a non-zero solution for $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ to the v

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}=0$$

Solution (a) Rewrite as

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha+\beta\\\alpha+\beta+\gamma\end{bmatrix}=0$$

Hence $\alpha=0$, $\alpha+\beta=0$ and $\alpha+\beta+\gamma=0$, equations which only have the solution $\alpha=\beta=\gamma=0$.

(b) Adding the four row entries, which are all zero, gives the equations

$$\alpha+\beta=0$$
$$\alpha+2\beta+\delta=0$$

$$\beta+\gamma=0$$
$$\gamma-\delta=0$$

The first equation gives $\beta=-\alpha$, the third gives $\gamma=-\beta$ Substituting, the second equation is satisfied identically $\alpha=t$, $\beta=-t$, $\gamma=t$, $\delta=t$ satisfies all the equations.

The important concept of **linear dependence/independe** 5.3. It will be used later in the chapter and particularly i sion of the number of eigenvectors associated with a rep $a_1, a_2, \ldots, a_n$ form a **linearly independent** set if the *onl*

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n=0$$

is $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Otherwise the set is said to be l in Example 5.3 the vectors in (a) are linearly independen dependent.

课程质量直接因素——教材内容对比（概念引入）

哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

■ 向量积引入—磁场中带电粒子的运动

Motion of a charged particle in a magnetic field

- If a charged particle has velocity $\boldsymbol{v}$ and moves in a magnetic field $\boldsymbol{H}$ then the particle experiences a force perpendicular to both $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{H}$, which is proportional to $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$. It is this force that is used to direct the beam in a television tube.
- Similarly a wire moving with velocity $\boldsymbol{v}$ in a magnetic field $\boldsymbol{H}$ produces a current proportional to $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$ (see Figure 4.35), thus converting mechanical energy into electric current, and provides the principle of the **dynamo**.
- For an **electric motor** the idea depends on the observation that an electric current C in a wire that lies in a magnetic field $\boldsymbol{H}$ produces a mechanical force proportional to $C\times\boldsymbol{H}$; again see Figure 4.35. Thus electrical energy is converted

Figure 4.35 In a magnetic field $\boldsymbol{H}$, (i) motion of the wire in the $\boldsymbol{v}$ direction creates a current in the $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v}$ (dynamo), (ii) a current C causes motion $\boldsymbol{v}$ in the $C\times\boldsymbol{H}$ direction (electric motor).

二、向量积

在物理学及几何学中，我们经常要考虑两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 产生的另一个特殊的向量 $\boldsymbol{c}$，此向量与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同时垂直，且其长度也与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度有一定的特殊关系。

如图 2.14，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的非零向量。由直观直线 L 上的一切向量就是同时与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直的向量，方向有两个。这一切向量由直线 L 上任何一个非零向量与一个实数相乘所得。下面我们就找出它们。

图 2.13

图 2.14

问题 若 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 为不共线的非零向量，试求与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同时垂直的向量。

试解 令向量 $\boldsymbol{c}=\{x_1,x_2,x_3\}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同时垂直，从而我们得到方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0.\end{cases}$$

由前面的分析，存在一个非零向量 $\boldsymbol{d}=\{k,l,m\}$ 使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{d}$，即

$$\begin{cases}x_1=\lambda k,\\x_2=\lambda l,\quad\lambda\in\mathbb{R}\\x_3=\lambda m,\end{cases}$$

就是此方程组的一切解；另一方面，由行列式展开定理知道，行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

第 1 行的代数余子式

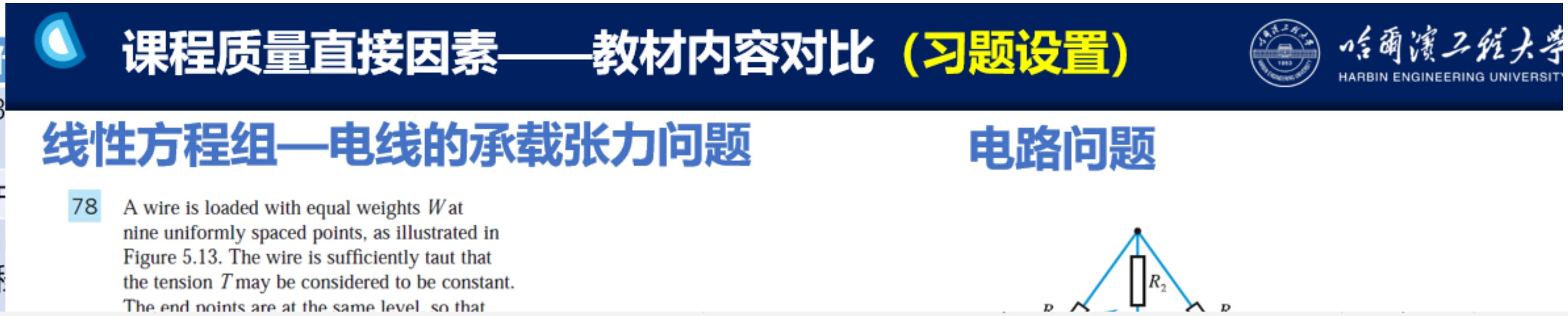
工科线代教材

重要概念由实际应用案例引入——1054从磁场中带电粒子运动引入向量积，体现向量积的实际应用；工科线代教材从几何上给出具体向量积定义形式。

工科第五章向量组的线性相关性在1054 矩阵运算的例题5.3中给出，后面注明线性相关性定义。第八章线性空间1054并没提及，但线性映射1054 时刻提及，将矩阵视为线性映射进行讲解的。

具体习题数据对比

内容名称	1054	工科线
向量代数	83+22=105，其中工程应用12道	34+0=3
矩阵	42，其中工程应用 4道	50，其
线性方程组	28，其中工程应用 11道	20+53 其中工



课程质量直接因素——教材内容对比（习题设置）

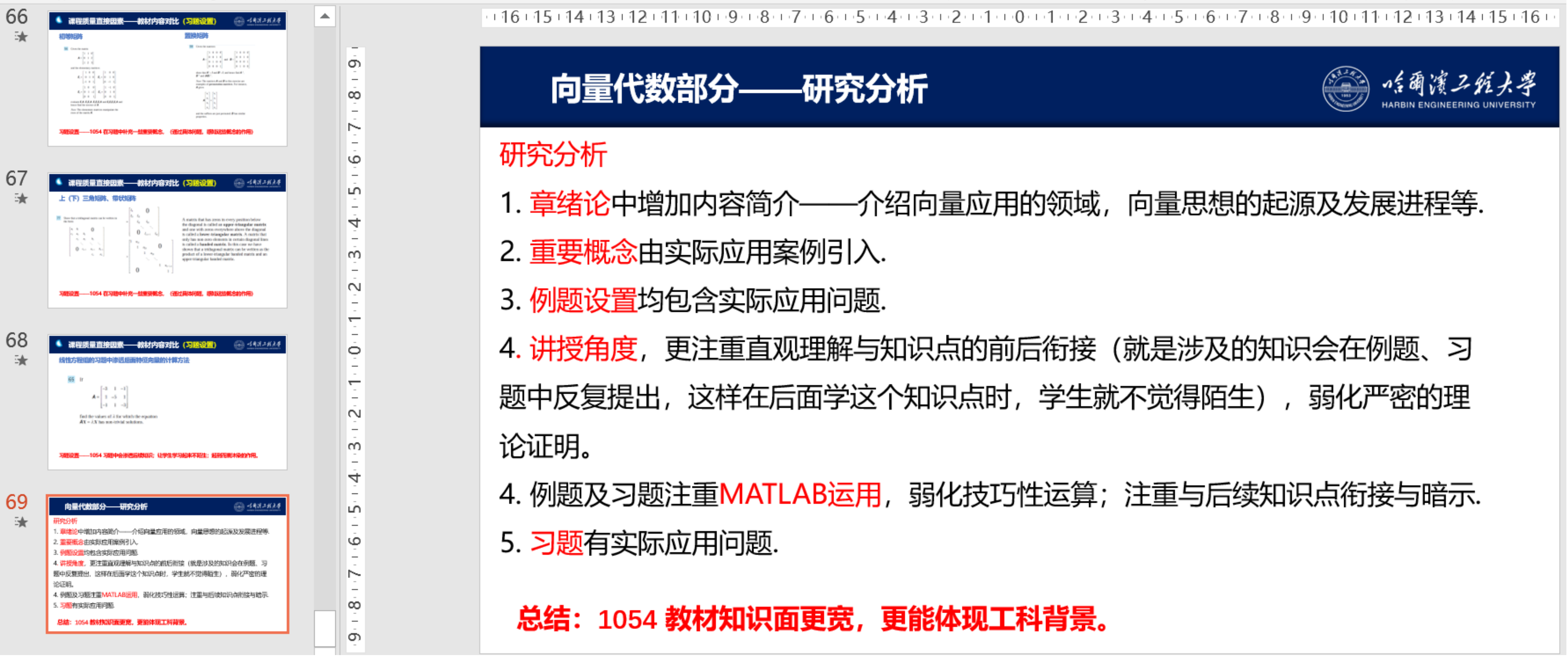
哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

线性方程组—电线的承载张力问题

电路问题

78 A wire is loaded with equal weights W at nine uniformly spaced points, as illustrated in Figure 5.13. The wire is sufficiently taut that the tension T may be considered to be constant. The end points are at the same level, so that

习
共



向量代数部分——研究分析

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

研究分析

1. 章绪论中增加内容简介——介绍向量应用的领域，向量思想的起源及发展进程等.
2. 重要概念由实际应用案例引入.
3. 例题设置均包含实际应用问题.
4. 讲授角度，更注重直观理解与知识点的前后衔接（就是涉及的知识会在例题、习题中反复提出，这样在后面学这个知识点时，学生就不觉得陌生），弱化严密的理论证明。
4. 例题及习题注重MATLAB运用，弱化技巧性运算；注重与后续知识点衔接与暗示.
5. 习题有实际应用问题.

总结：1054 教材知识面更宽，更能体现工科背景。

国际化内容借鉴

理念借鉴: 强调几何直观与紧密结合工程应用

资源借鉴: 经典的工程案例库（如卫星定位问题、电线的承载张力问题等）；

抽象概念的工程视角引入与几何直观理解（例如：磁场带电粒子运动引入向量积；线性变换视角引入矩阵概念等）；

知识模块化教学（27个模块中提炼出5个线性代数知识模块）；

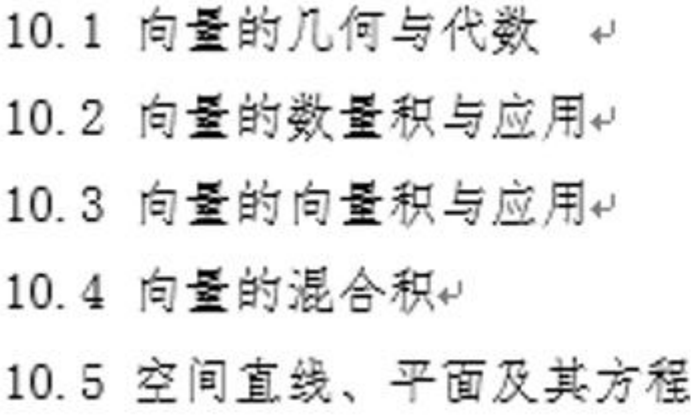
实施过程性考核（以模块为单位，开展考核）

核心理念：学生中心，能力导向；跨界融合、问题驱动；数据决策，持续改进

（2）课程内容制定与全英文教学资源建设

课程内容（40学时，26学时授课，14学时研讨课）：

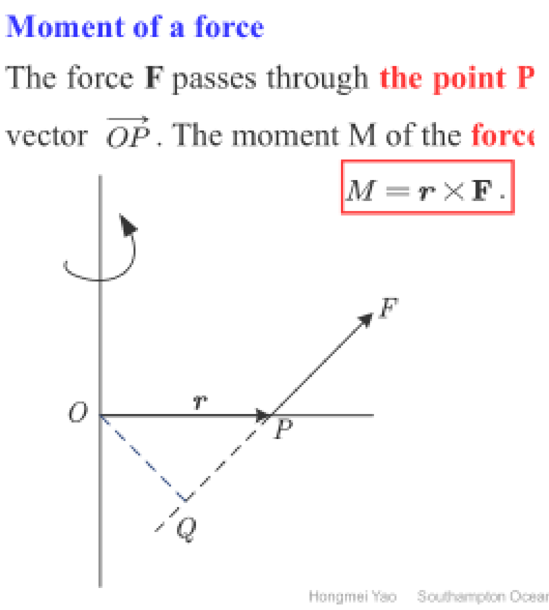
模块1 向量代数



10.1 向量的几何与代数 ↵
10.2 向量的数量积与应用↵
10.3 向量的向量积与应用↵
10.4 向量的混合积↵
10.5 空间直线、平面及其方程

增加：

力矩，角速度，做功应用及向量积、混合积的几何意义，python软件

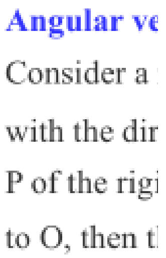


Moment of a force

The force **F** passes through **the point P** vector $\overrightarrow{OP}$. The moment M of the **forc**

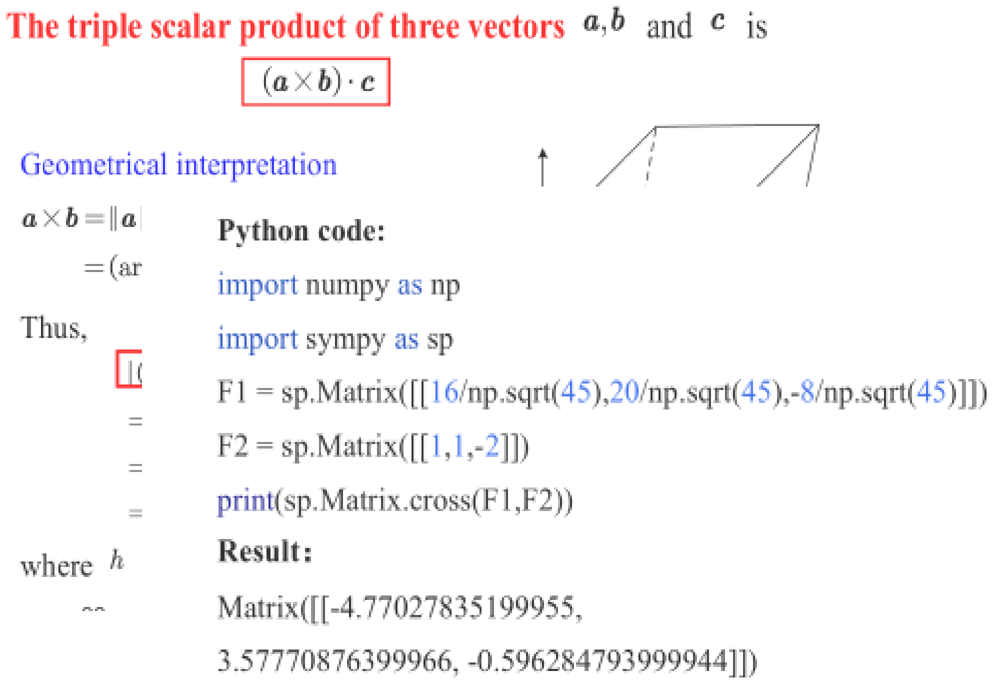
$$\boxed{M = \boldsymbol{r}\times\mathbf{F}\,.}$$

Hongmei Yao Southampton Ocean



Angular ve

Consider a
with the dir
P of the rigi
to O, then t



The triple scalar product of three vectors $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ is

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$$

Geometrical interpretation

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}$

$=(\text{ar}$

Thus,

where h

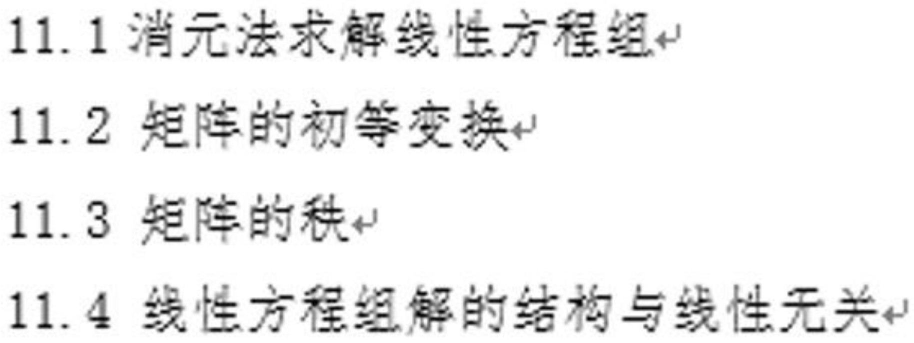
Python code:

```
import numpy as np
import sympy as sp
F1 = sp.Matrix([[16/np.sqrt(45),20/np.sqrt(45),-8/np.sqrt(45)]])
F2 = sp.Matrix([[1,1,-2]])
print(sp.Matrix.cross(F1,F2))
```

Result:

```
Matrix([[-4.77027835199955,
3.57770876399966, -0.596284793999944]])
```

模块2 线性方程组



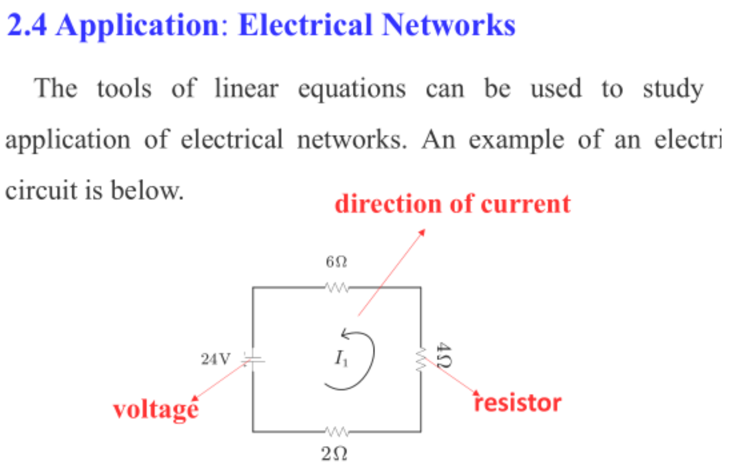
11.1 消元法求解线性方程组

11.2 矩阵的初等变换

11.3 矩阵的秩

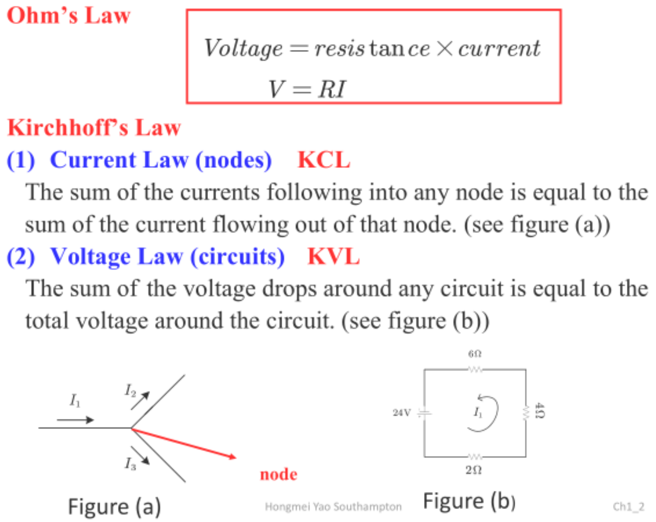
11.4 线性方程组解的结构与线性无关

增加：应用线性方程组求解电路回路问题，包括网格分析法及节点分析法



2.4 Application: Electrical Networks

The tools of linear equations can be used to study application of electrical networks. An example of an electri circuit is below.



Ohm's Law

$$Voltage = resis\tan ce \times current$$
$$V = RI$$

Kirchhoff's Law

(1) Current Law (nodes) KCL

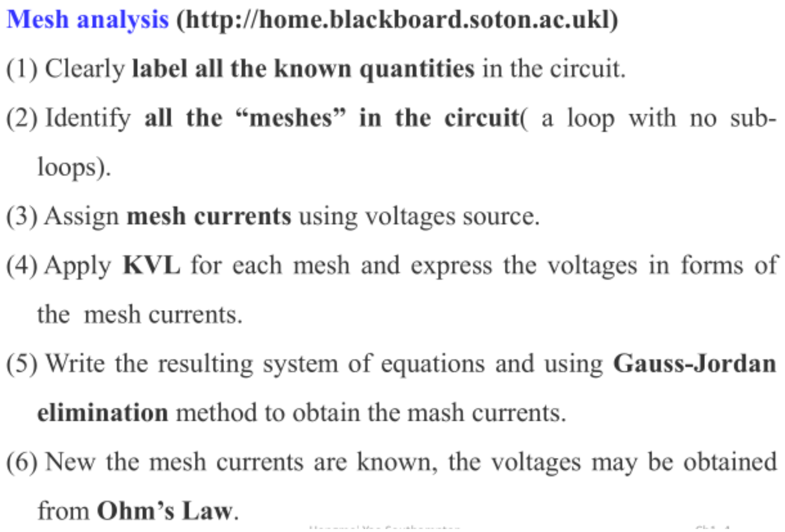
The sum of the currents following into any node is equal to the sum of the current flowing out of that node. (see figure (a))

(2) Voltage Law (circuits) KVL

The sum of the voltage drops around any circuit is equal to the total voltage around the circuit. (see figure (b))

Figure (a)

Figure (b)



Mesh analysis (http://home.blackboard.soton.ac.ukl)

(1) Clearly **label all the known quantities** in the circuit.

(2) Identify **all the "meshes" in the circuit**(a loop with no sub-loops).

(3) Assign **mesh currents** using voltages source.

(4) Apply **KVL** for each mesh and express the voltages in forms of the mesh currents.

(5) Write the resulting system of equations and using **Gauss-Jordan elimination** method to obtain the mash currents.

(6) New the mesh currents are known, the voltages may be obtained from **Ohm's Law**.

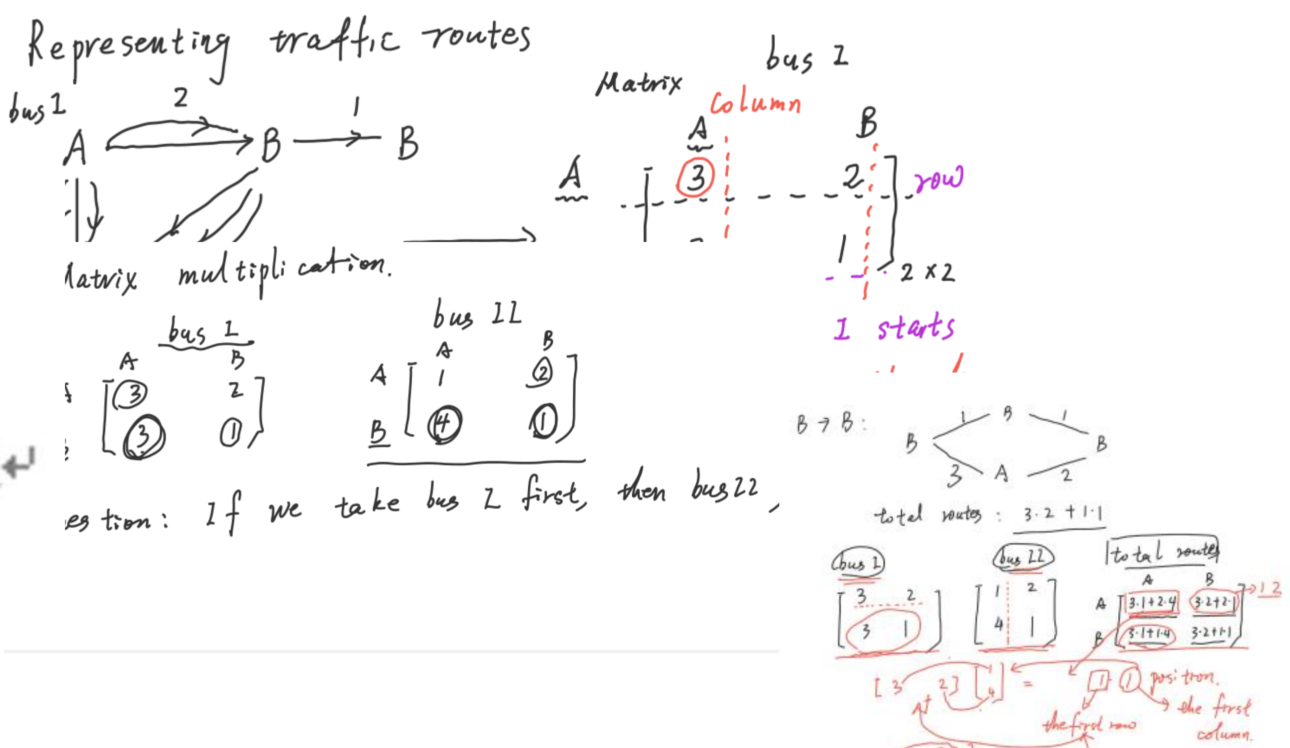
模块3 矩阵代数

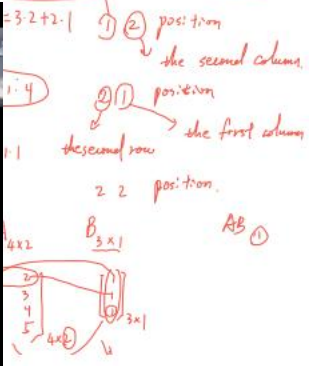
12.1 矩阵的定义及基本性质↵

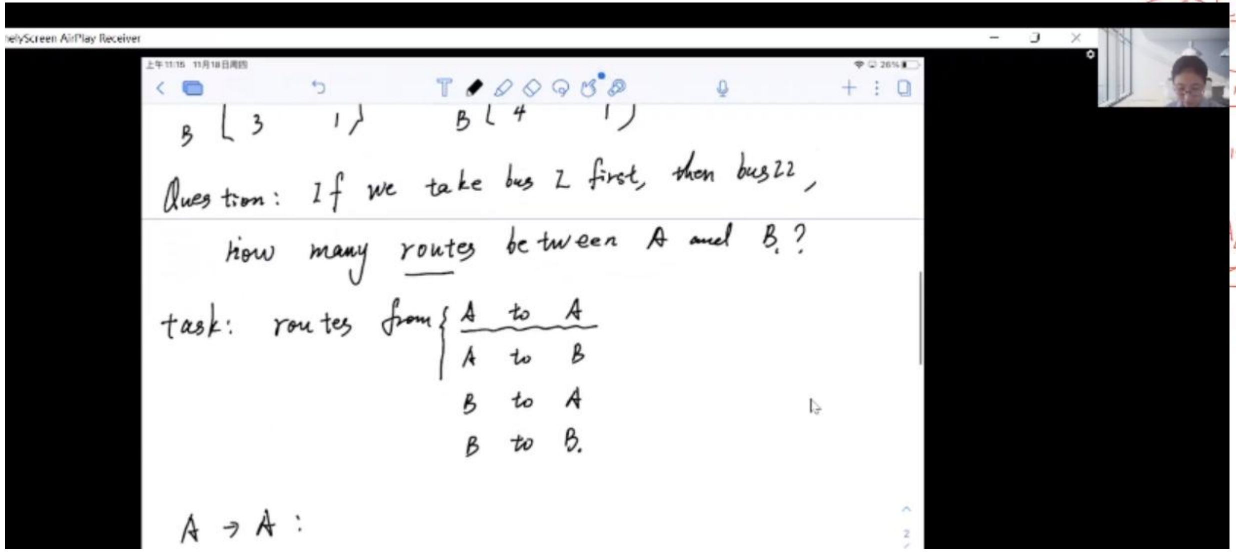
12.2 矩阵乘法及性质↵

12.3 矩阵的逆及消元法求矩阵的逆↵

增加：交通路线问题引入矩阵定义及矩阵乘法运算（视频内容）以及从线性变换及复合运算视角给出矩阵定义及乘法运算







B [3   1]   B [4   1]

Question: If we take bus 2 first, then bus 22,

how many routes between A and B?

task: routes from { A to A

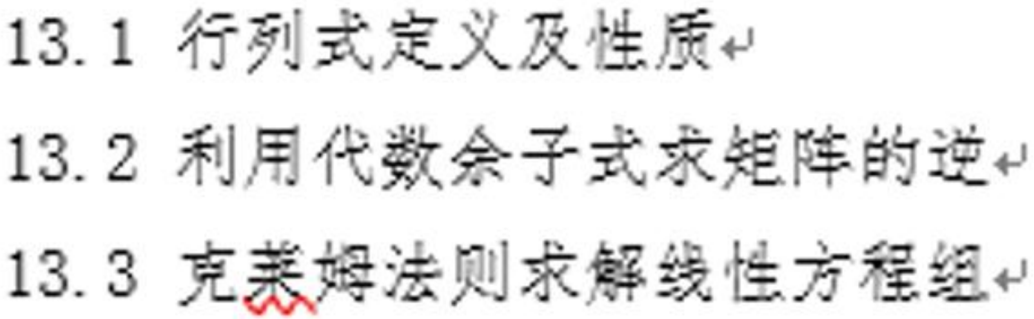
A to B

B to A

B to B.

A → A :

模块4 行列式

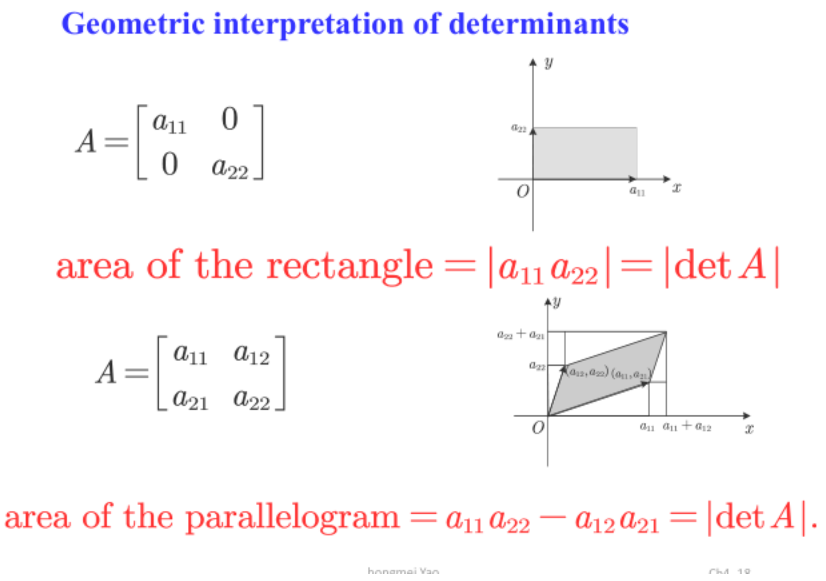


13.1 行列式定义及性质↵

13.2 利用代数余子式求矩阵的逆↵

13.3 克莱姆法则求解线性方程组↵

增加：**二、三阶行列式的几何意义，弱化行列式的各种计算技巧，及性质证明，从几何角度观察性质。**



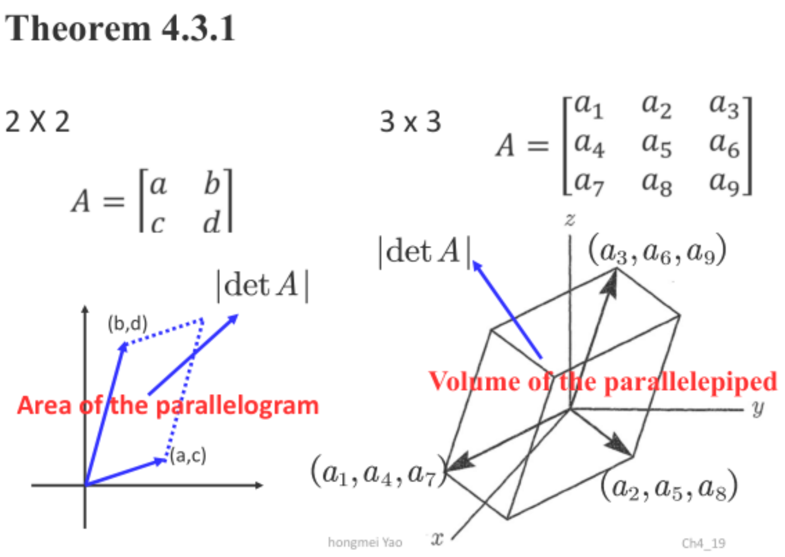
Geometric interpretation of determinants

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}$$

area of the rectangle $= |a_{11}a_{22}| = |\det A|$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

area of the parallelogram $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\det A|$.



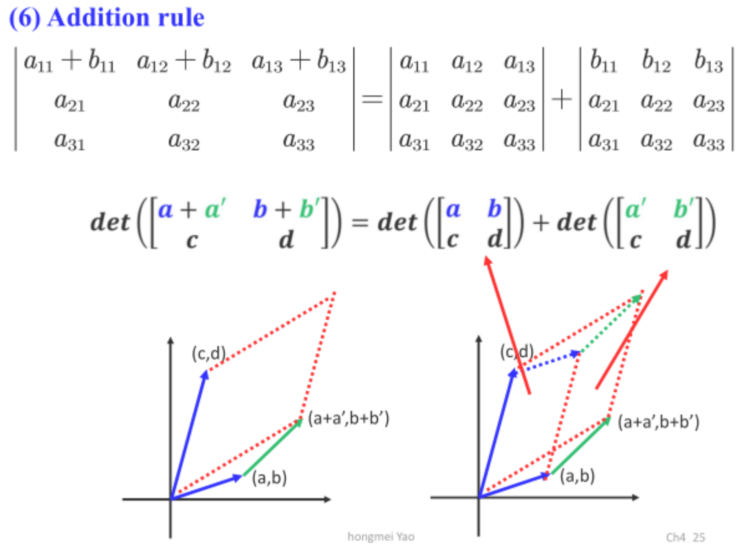
Theorem 4.3.1

2 X 2

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

3 x 3

$$A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_4&a_5&a_6\\a_7&a_8&a_9\end{bmatrix}$$

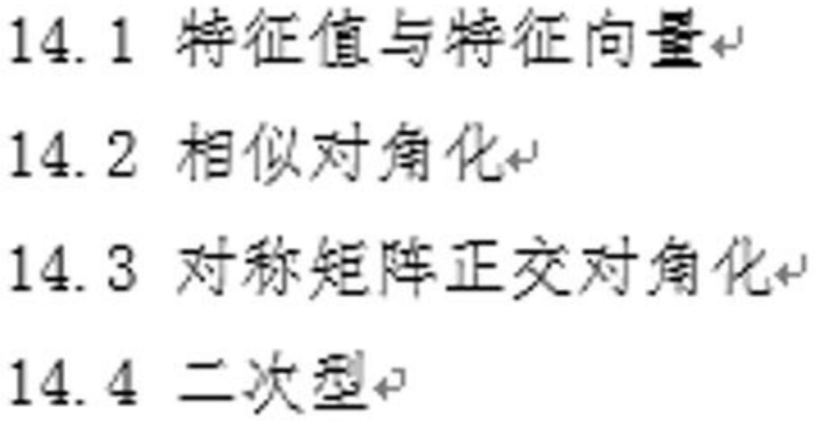


(6) Addition rule

$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}a+a'&b+b'\\c&d\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)+\det\left(\begin{bmatrix}a'&b'\\c&d\end{bmatrix}\right)$$

模块5 特征值和特征向量



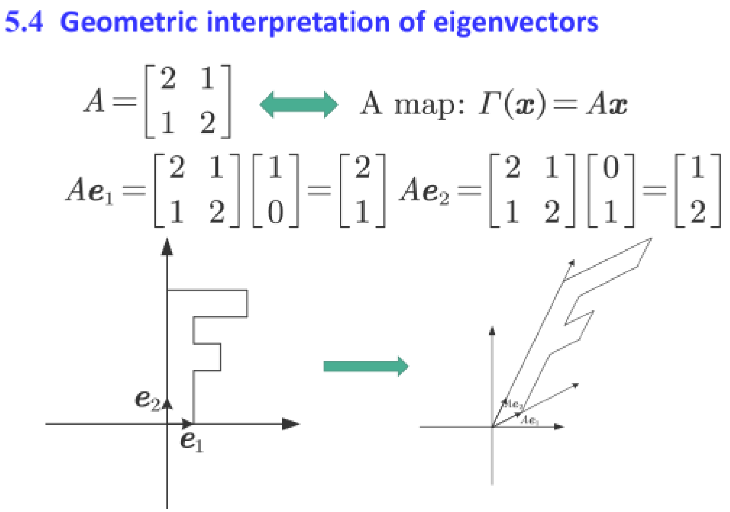
14.1 特征值与特征向量

14.2 相似对角化

14.3 对称矩阵正交对角化

14.4 二次型

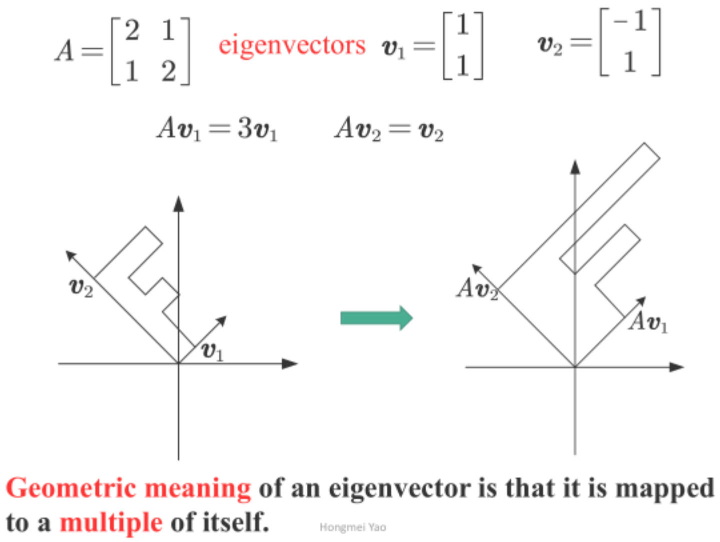
增加： 特征值特征向量几何解释，将二次型与正交对角化视为对角化的特例。



5.4 Geometric interpretation of eigenvectors

$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \longleftrightarrow$ A map: $\Gamma(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$

$A\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $A\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

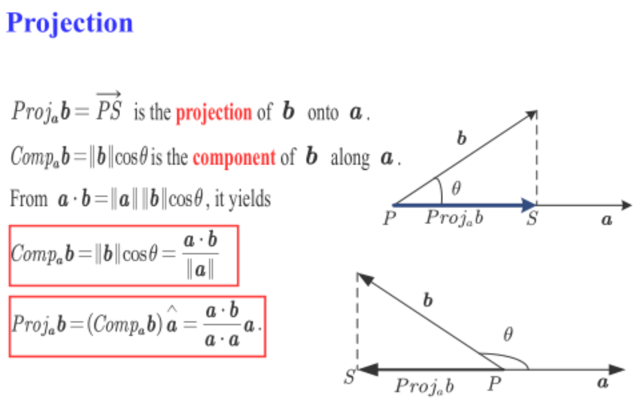


$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ eigenvectors $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$A\boldsymbol{v}_1=3\boldsymbol{v}_1$ $A\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2$

Geometric meaning of an eigenvector is that it is mapped to a multiple of itself.

Hongmei Yao



Projection

$Proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PS}$ is the projection of $\boldsymbol{b}$ onto $\boldsymbol{a}$.

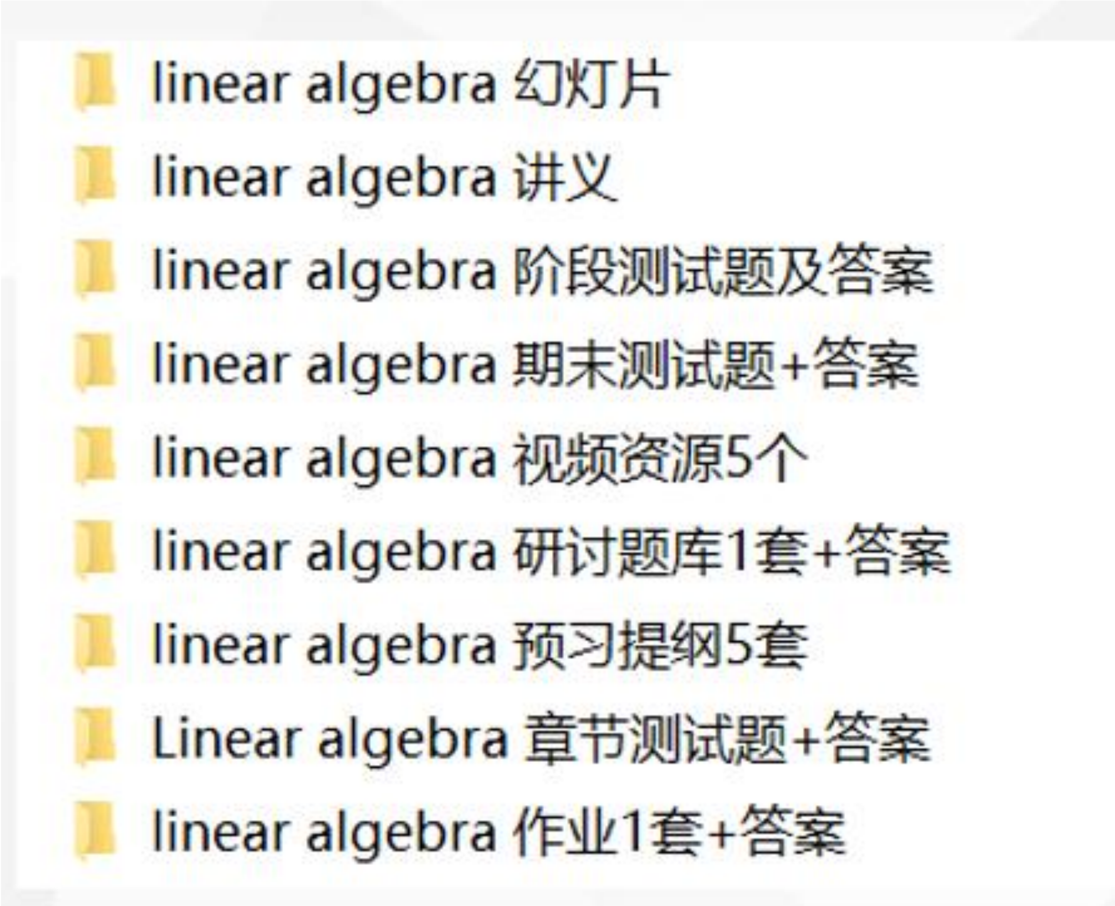
$Comp_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ is the component of $\boldsymbol{b}$ along $\boldsymbol{a}$.

From $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$, it yields

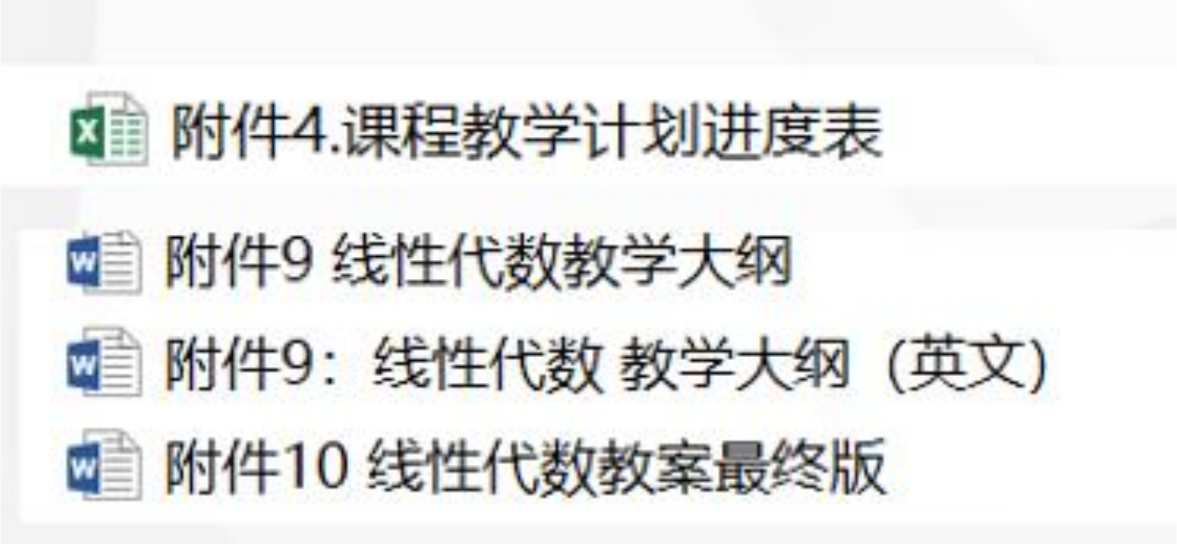
$$\boxed{Comp_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|}}$$

$$\boxed{Proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=(Comp_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}.}$$

全英文教学资源建设

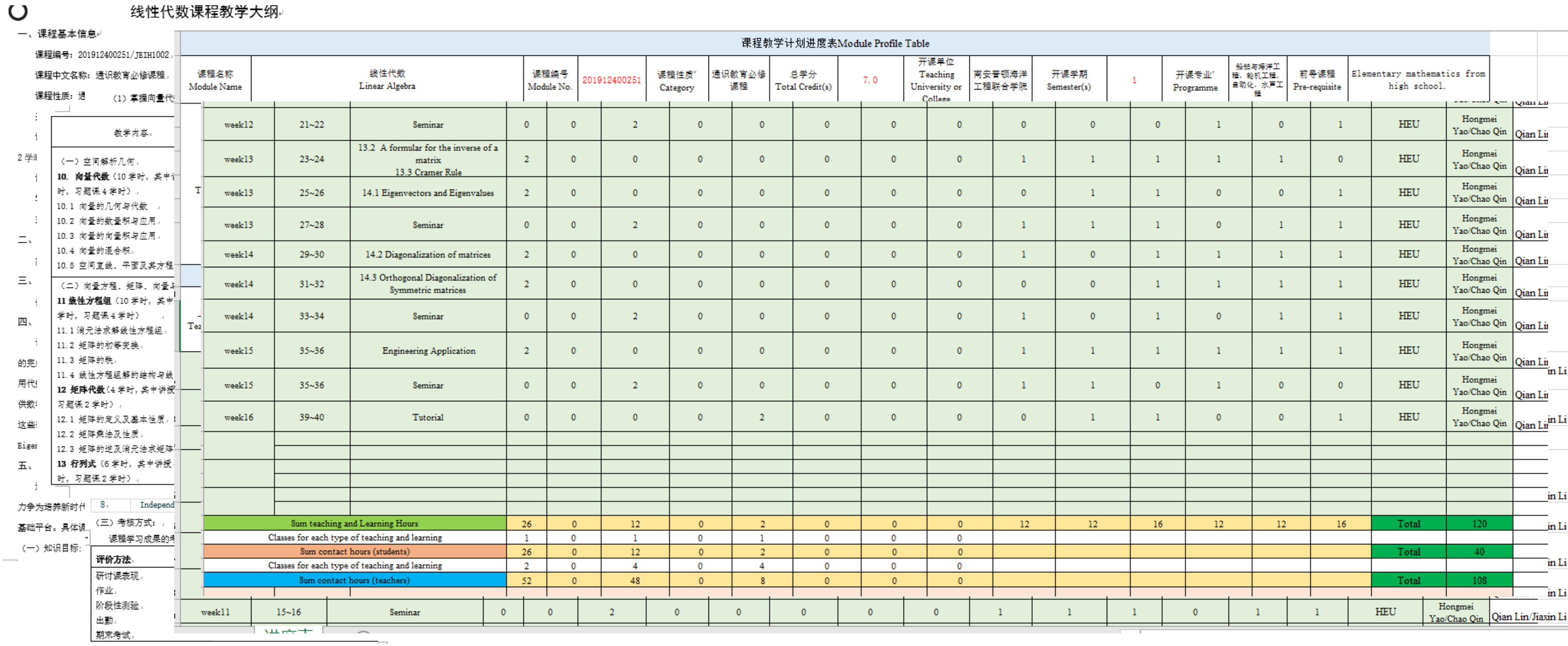


linear algebra 幻灯片
linear algebra 讲义
linear algebra 阶段测试题及答案
linear algebra 期末测试题+答案
linear algebra 视频资源5个
linear algebra 研讨题库1套+答案
linear algebra 预习提纲5套
Linear algebra 章节测试题+答案
linear algebra 作业1套+答案



附件4.课程教学计划进度表
附件9 线性代数教学大纲
附件9：线性代数 教学大纲（英文）
附件10 线性代数教案最终版

教学大纲和教学进度表



线性代数课程教学大纲

一、课程基本信息

课程编号：201912400251/JEIH1002

课程中文名称：通识教育必修课程

课程性质：通

（1）掌握向量代

2 学

二、

三、

四、

的完

用代

供数

这些

Eiger

五、

力争为培养新时代

基础平台。具体课

（一）知识目标：

教学内容
（一）空间解析几何 **10. 向量代数**（10 学时，其中讲 时，习题课 4 学时） 10.1 向量的几何与代数 10.2 向量的数量积与应用 10.3 向量的向量积与应用 10.4 向量的混合积 10.5 空间直线、平面及其方程
（二）向量方程、矩阵、向量与 **11 线性方程组**（10 学时，其中 学时，习题课 4 学时） 11.1 消元法求解线性方程组 11.2 矩阵的初等变换 11.3 矩阵的秩 11.4 线性方程组解的结构与线 **12 矩阵代数**（4 学时，其中讲授 习题课 2 学时） 12.1 矩阵的定义及基本性质 12.2 矩阵乘法及性质 12.3 矩阵的逆及消元法求矩阵 **13 行列式**（6 学时，其中讲授 时，习题课 2 学时）

8 Independ

（三）考核方式：

课程学习成果的考

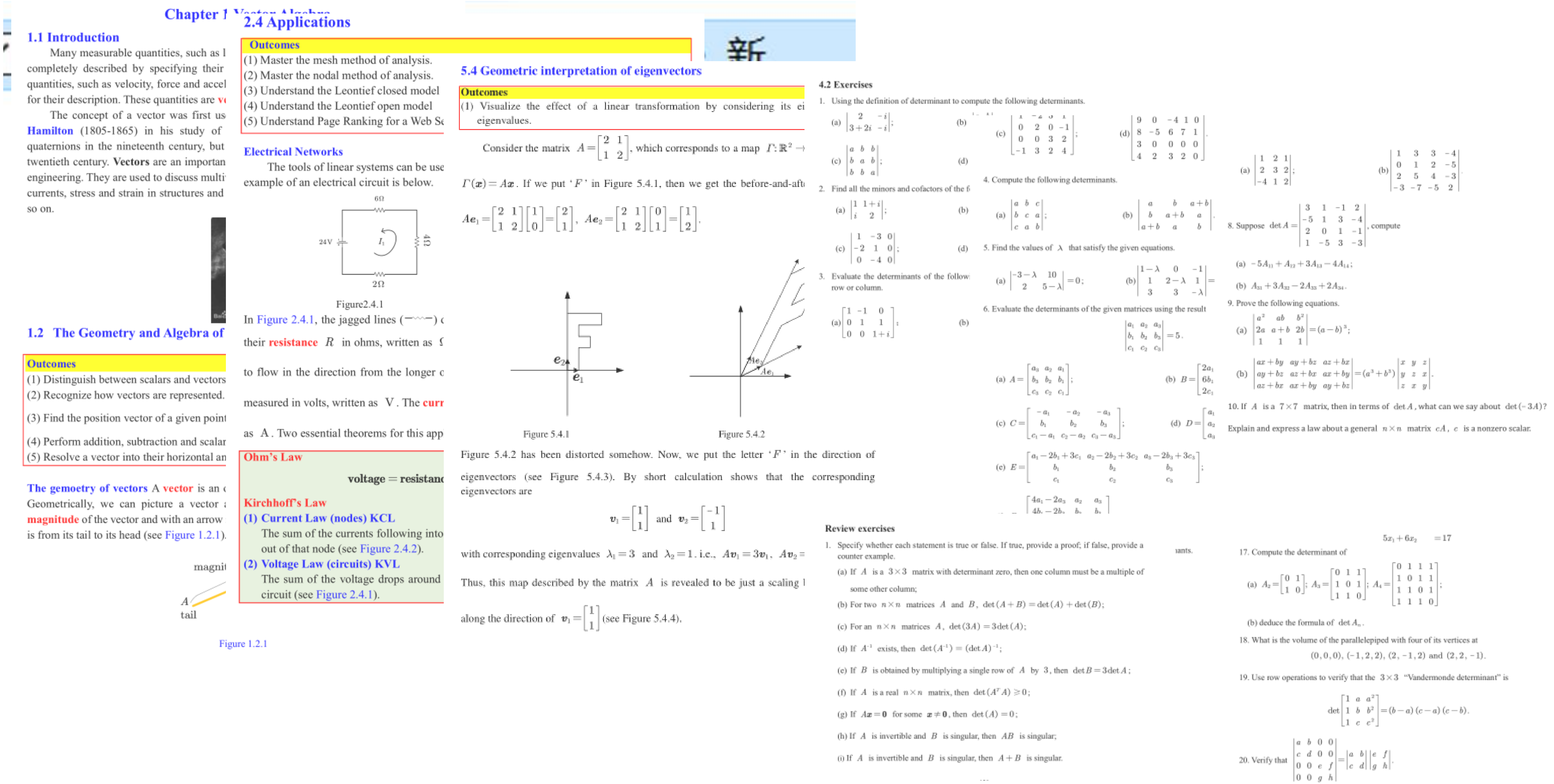
评价方法
研讨课表现
作业
阶段性测验
出勤
期末考试

课程教学计划进度表Module Profile Table

课程名称 Module Name	线性代数 Linear Algebra	课程编号 Module No.	201912400251	课程性质* Category	通识教育必修课程	总学分 Total Credit(s)	7.0	开课单位 Teaching University or College	南安普顿海洋工程联合学院	开课学期 Semester(s)	1	开课专业* Programme	船舶与海洋工程，轮机工程，自动化，水声工程	前导课程 Pre-requisite	Elementary mathematics from high school.		

week12	21~22	Seminar	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week13	23~24	13.2 A formular for the inverse of a matrix 13.3 Cramer Rule	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week13	25~26	14.1 Eigenvectors and Eigenvalues	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week13	27~28	Seminar	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week14	29~30	14.2 Diagonalization of matrices	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week14	31~32	14.3 Orthogonal Diagonalization of Symmetric matrices	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week14	33~34	Seminar	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week15	35~36	Engineering Application	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week15	35~36	Seminar	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
week16	39~40	Tutorial	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Li
Sum teaching and Learning Hours			26	0	12	0	2	0	0	0	12	12	16	12	12	16	Total	120	
Classes for each type of teaching and learning			1	0	1	0	1	0	0	0									
Sum contact hours (students)			26	0	12	0	2	0	0	0							Total	40	
Classes for each type of teaching and learning			2	0	4	0	4	0	0	0									
Sum contact hours (teachers)			52	0	48	0	8	0	0	0							Total	108	
week11	15~16	Seminar	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	HEU	Hongmei Yao/Chao Qin	Qian Lin/Jiaxin Li

讲义



Chapter 1 Vector Algebra

1.1 Introduction

Many measurable quantities, such as l completely described by specifying their quantities, such as velocity, force and accel for their description. These quantities are ve

The concept of a vector was first us **Hamilton** (1805-1865) in his study of quaternions in the nineteenth century, but twentieth century. **Vectors** are an importan engineering. They are used to discuss multi currents, stress and strain in structures and so on.

1.2 The Geometry and Algebra of

Outcomes

(1) Distinguish between scalars and vectors
(2) Recognize how vectors are represented.
(3) Find the position vector of a given point
(4) Perform addition, subtraction and scalar
(5) Resolve a vector into their horizontal an

The gemoetry of vectors A **vector** is an Geometrically, we can picture a vector magnitude of the vector and with an arrow is from its tail to its head (see Figure 1.2.1).

magnit
A
tail

Figure 1.2.1

2.4 Applications

Outcomes

(1) Master the mesh method of analysis.
(2) Master the nodal method of analysis.
(3) Understand the Leontief closed model
(4) Understand the Leontief open model
(5) Understand Page Ranking for a Web Se

Electrical Networks

The tools of linear systems can be use example of an electrical circuit is below.

6Ω
24V
I_1
4Ω
2Ω

Figure2.4.1

In Figure 2.4.1, the jagged lines (—⌇⌇—) their **resistance** R in ohms, written as to flow in the direction from the longer measured in volts, written as V. The **curr** as A. Two essential theorems for this app

Ohm's Law

voltage = resistanc

Kirchhoff's Law

(1) Current Law (nodes) KCL

The sum of the currents following into out of that node (see Figure 2.4.2).

(2) Voltage Law (circuits) KVL

The sum of the voltage drops around circuit (see Figure 2.4.1).

5.4 Geometric interpretation of eigenvectors

Outcomes

(1) Visualize the effect of a linear transformation by considering its ei eigenvalues.

Consider the matrix $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$, which corresponds to a map $\Gamma:\mathbb{R}^2\to$

$\Gamma(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$. If we put '$F$' in Figure 5.4.1, then we get the before-and-aft

$$A\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1$

Figure 5.4.1

$A\boldsymbol{e}_2$
$A\boldsymbol{e}_1$

Figure 5.4.2

Figure 5.4.2 has been distorted somehow. Now, we put the letter 'F' in the direction of eigenvectors (see Figure 5.4.3). By short calculation shows that the corresponding eigenvectors are

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\text{ and }\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

with corresponding eigenvalues $\lambda_1=3$ and $\lambda_2=1$. i.e., $A\boldsymbol{v}_1=3\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2=$

Thus, this map described by the matrix A is revealed to be just a scaling l along the direction of $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (see Figure 5.4.4).

新

4.2 Exercises

1. Using the definition of determinant to compute the following determinants.

(a) $\begin{vmatrix}2&-i\\3+2i&-i\end{vmatrix}$; (b)

(c) $\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}$; (d)

2. Find all the minors and cofactors of the f

(a) $\begin{vmatrix}1&1+i\\i&2\end{vmatrix}$; (b)

(c) $\begin{vmatrix}1&-3&0\\-2&1&0\\0&-4&0\end{vmatrix}$; (d)

3. Evaluate the determinants of the follow row or column.

(a) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&1+i\end{bmatrix}$; (b)

(c) $\begin{bmatrix}0&2&0&-1\\0&0&3&2\\-1&3&2&4\end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix}9&0&-4&1&0\\8&-5&6&7&1\\3&0&0&0&0\\4&2&3&2&0\end{bmatrix}$.

4. Compute the following determinants.

(a) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix}a&b&a+b\\b&a+b&a\\a+b&a&b\end{vmatrix}$.

5. Find the values of λ that satisfy the given equations.

(a) $\begin{vmatrix}-3-\lambda&10\\2&5-\lambda\end{vmatrix}=0$; (b) $\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\1&2-\lambda&1\\3&3&-\lambda\end{vmatrix}=$

6. Evaluate the determinants of the given matrices using the result

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=5.$$

(a) $A=\begin{bmatrix}a_3&a_2&a_1\\b_3&b_2&b_1\\c_3&c_2&c_1\end{bmatrix}$; (b) $B=\begin{bmatrix}2a_1\\6b_1\\2c_1\end{bmatrix}$

(c) $C=\begin{bmatrix}-a_1&-a_2&-a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1-a_1&c_2-a_2&c_3-a_3\end{bmatrix}$; (d) $D=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

(e) $E=\begin{bmatrix}a_1-2b_1+3c_1&a_2-2b_2+3c_2&a_3-2b_3+3c_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix}4a_1-2a_3&a_2&a_3\\4b_1-2b_3&b_2&b_3\end{bmatrix}$

(a) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&2\\-4&1&2\end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix}1&3&3&-4\\0&1&2&-5\\2&5&4&-3\\-3&-7&-5&2\end{vmatrix}$.

8. Suppose $\det A=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$, compute

(a) $-5A_{11}+A_{12}+3A_{13}-4A_{14}$;

(b) $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

9. Prove the following equations.

(a) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

(b) $\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$.

10. If A is a 7×7 matrix, then in terms of $\det A$, what can we say about $\det(-3A)$?

Explain and express a law about a general $n\times n$ matrix cA, c is a nonzero scalar.

Review exercises

1. Specify whether each statement is true or false. If true, provide a proof; if false, provide a counter example.

(a) If A is a 3×3 matrix with determinant zero, then one column must be a multiple of some other column;

(b) For two $n\times n$ matrices A and B, $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$;

(c) For an $n\times n$ matrices A, $\det(3A)=3\det(A)$;

(d) If A^{-1} exists, then $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$;

(e) If B is obtained by multiplying a single row of A by 3, then $\det B=3\det A$;

(f) If A is a real $n\times n$ matrix, then $\det(A^TA)\geqslant0$;

(g) If $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ for some $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, then $\det(A)=0$;

(h) If A is invertible and B is singular, then AB is singular;

(i) If A is invertible and B is singular, then $A+B$ is singular.

…

ants.

$5x_1+6x_2 \quad =17$

17. Compute the determinant of

(a) $A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$; $A_3=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$; $A_4=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$;

(b) deduce the formula of $\det A_n$.

18. What is the volume of the parallelepiped with four of its vertices at

$(0,0,0)$, $(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$ and $(2,2,-1)$.

19. Use row operations to verify that the 3×3 "Vandermonde determinant" is

$$\det\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{bmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

20. Verify that $\begin{vmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&e&f\\0&0&g&h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}e&f\\g&h\end{vmatrix}$.

课件

- Chapter 1 Vector Algebra ppt
- chapter 2 Linear algebra ppt
- chapter 3 Matrix algebra ppt
- chapter 4 Determinant ppt
- Chapter 5 Eigenvalues and eigenvectors ...

内容交互性

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Has solution or not?

The same question

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Is b the linear combination of columns of A?

The same question

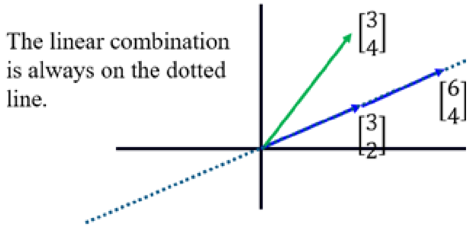
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in Span \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$$

Is b in the span of the columns of A?

几何直观性

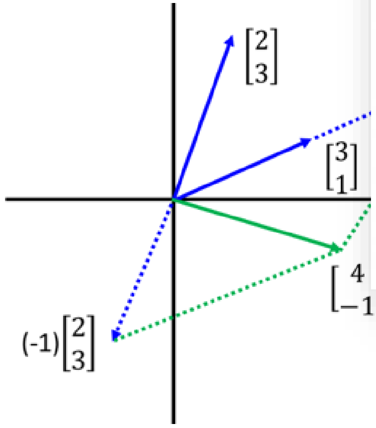
$$\boxed{\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}}$$

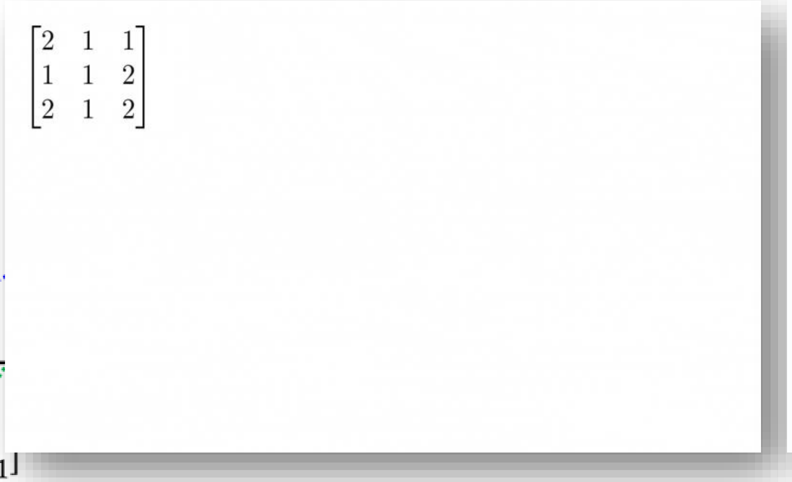
Has solution or not?



$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 1x_2 &= -1 \end{aligned}}$$

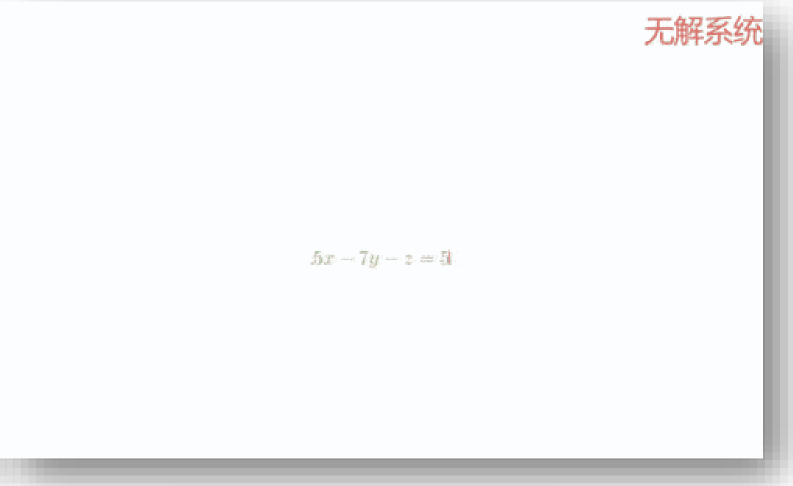
Has solution or not?





$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

动态演示——线性变换



无解系统

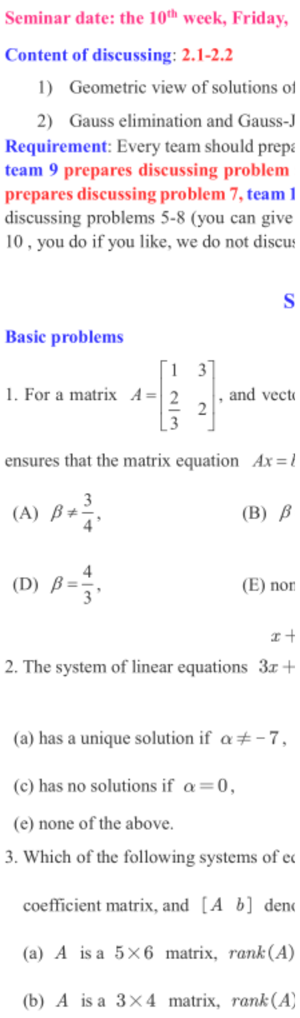
$5x - 7y - z = 5$

动态演示——方程组的解

Seminar 研讨题

- the 1st seminar problems
- the 2nd seminar problems
- the 3rd seminar problems
- the 4th seminar problems
- the 5th seminar problems
- the 6th Seminar problems

- the 5th seminar problems answers
- the 1st seminar answers
- the 2nd seminar problems answers
- the 3rd seminar answers
- the 4th seminar answers
- the 6th seminar problems answers



Seminar date: the 10th week, Friday,

Content of discussing: **2.1-2.2**

1) Geometric view of solutions of

2) Gauss elimination and Gauss-J

Requirement: Every team should prepa **team 9 prepares discussing problem** **prepares discussing problem 7, team 1** discussing problems 5-8 (you can give 10 , you do if you like, we do not discus

S

Basic problems

1. For a matrix $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ \frac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$, and vect

ensures that the matrix equation $Ax=l$

(A) $\beta\neq\frac{3}{4}$, (B) β

(D) $\beta=\frac{4}{3}$, (E) non

$x+$

2. The system of linear equations $3x+$

(a) has a unique solution if $\alpha\neq-7$,

(c) has no solutions if $\alpha=0$,

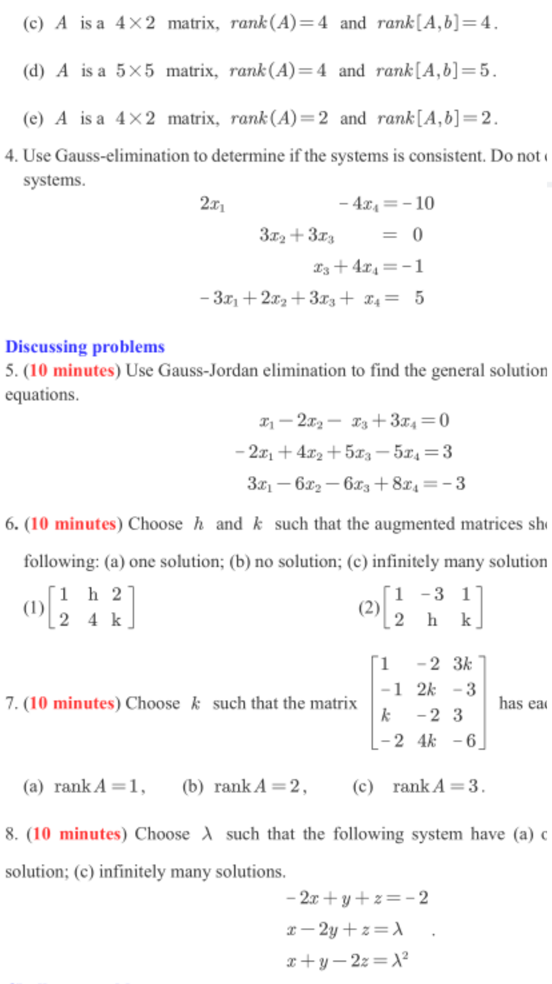
(e) none of the above.

3. Which of the following systems of e

coefficient matrix, and $[A\ \ b]$ den

(a) A is a 5×6 matrix, $rank(A)$

(b) A is a 3×4 matrix, $rank(A)$



(c) A is a 4×2 matrix, $rank(A)=4$ and $rank[A,b]=4$.

(d) A is a 5×5 matrix, $rank(A)=4$ and $rank[A,b]=5$.

(e) A is a 4×2 matrix, $rank(A)=2$ and $rank[A,b]=2$.

4. Use Gauss-elimination to determine if the systems is consistent. Do not systems.

$$\begin{aligned}2x_1 \qquad\qquad -4x_4&=-10\\ 3x_2+3x_3 \qquad &=\ 0\\ x_3+4x_4&=-1\\ -3x_1+2x_2+3x_3+\ x_4&=\ 5\end{aligned}$$

Discussing problems

5. (**10 minutes**) Use Gauss-Jordan elimination to find the general solution equations.

$$\begin{aligned}x_1-2x_2-\ x_3+3x_4&=0\\ -2x_1+4x_2+5x_3-5x_4&=3\\ 3x_1-6x_2-6x_3+8x_4&=-3\end{aligned}$$

6. (**10 minutes**) Choose h and k such that the augmented matrices sh following: (a) one solution; (b) no solution; (c) infinitely many solution

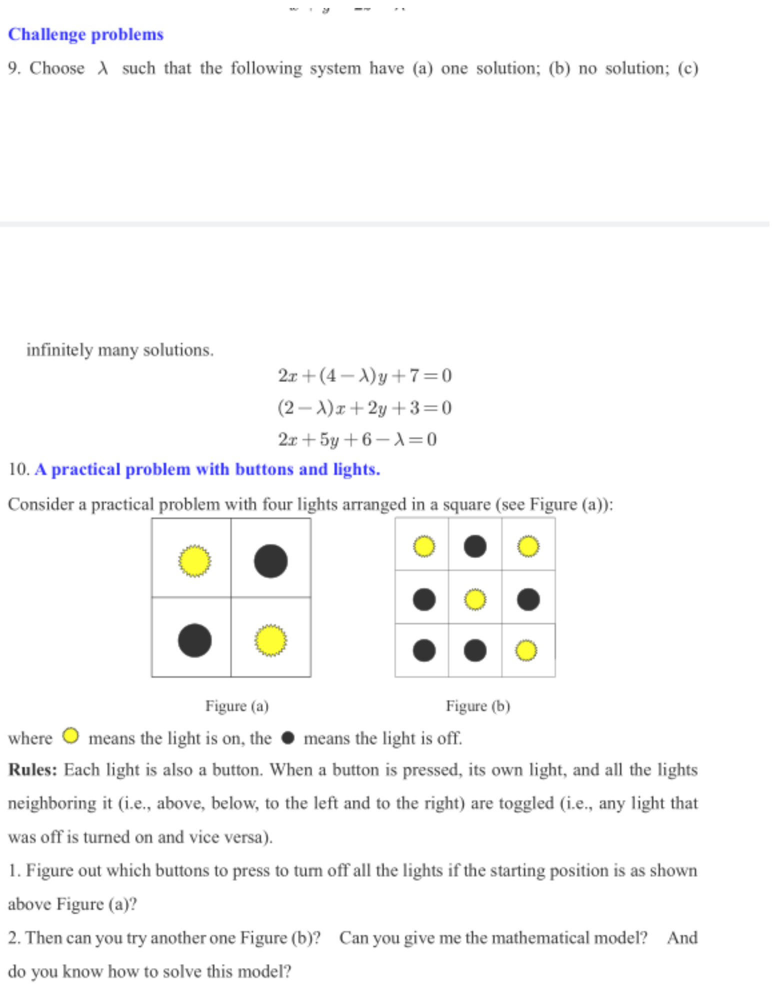
(1) $\begin{bmatrix}1 & \mathrm{h} & 2\\ 2 & 4 & \mathrm{k}\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & \mathrm{h} & \mathrm{k}\end{bmatrix}$

7. (**10 minutes**) Choose k such that the matrix $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\\ -2 & 4k & -6\end{bmatrix}$ has ea

(a) $\mathrm{rank}\,A=1$, (b) $\mathrm{rank}\,A=2$, (c) $\mathrm{rank}\,A=3$.

8. (**10 minutes**) Choose λ such that the following system have (a) c solution; (c) infinitely many solutions.

$$\begin{aligned}-2x+y+z&=-2\\ x-2y+z&=\lambda\\ x+y-2z&=\lambda^2\end{aligned}$$



Challenge problems

9. Choose λ such that the following system have (a) one solution; (b) no solution; (c)

infinitely many solutions.

$$\begin{aligned}2x+(4-\lambda)y+7&=0\\ (2-\lambda)x+2y+3&=0\\ 2x+5y+6-\lambda&=0\end{aligned}$$

10. **A practical problem with buttons and lights.**

Consider a practical problem with four lights arranged in a square (see Figure (a)):

Figure (a) Figure (b)

where ○ means the light is on, the ● means the light is off.

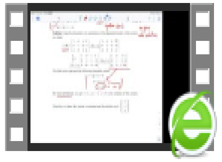
Rules: Each light is also a button. When a button is pressed, its own light, and all the lights neighboring it (i.e., above, below, to the left and to the right) are toggled (i.e., any light that was off is turned on and vice versa).

1. Figure out which buttons to press to turn off all the lights if the starting position is as shown above Figure (a)?

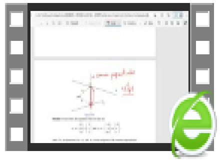
2. Then can you try another one Figure (b)? Can you give me the mathematical model? And do you know how to solve this model?

全英文教学视频资源

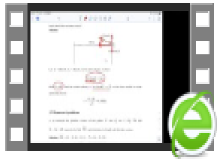
11.13 12周研讨题 9 和10 研讨题的详细解析



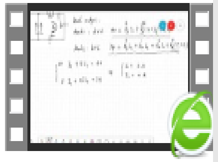
Chapter 2 homework 讲解视频



shortest distance problem and



the 8th week homework explanation

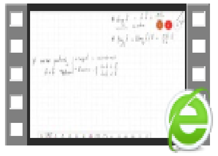


典型电路问题 分析讲解视频

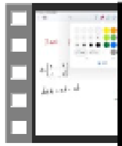
典型行列式讲解

矩阵及矩阵乘法的实际问题引入

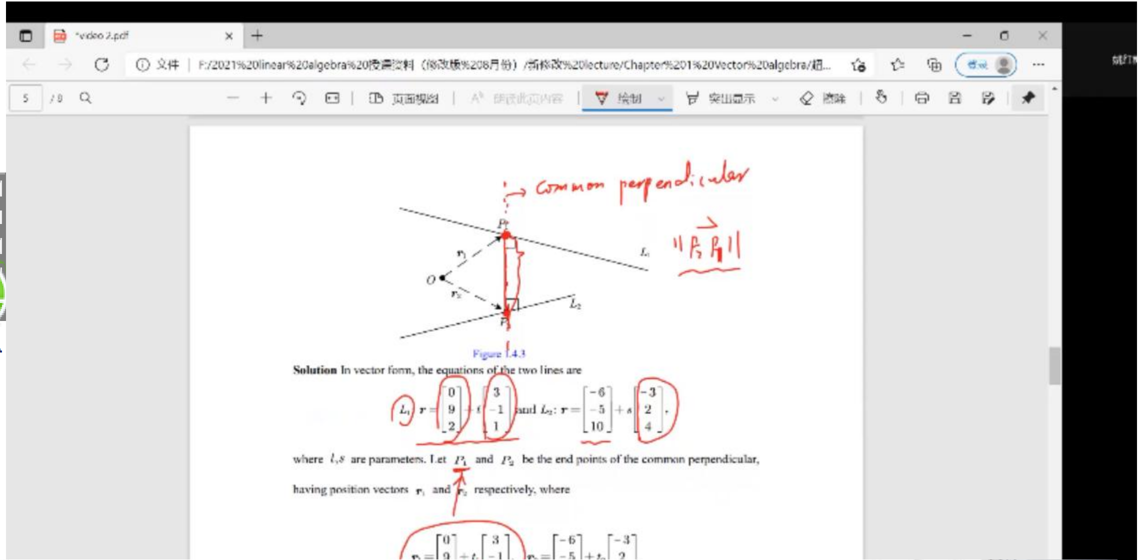
若当标准型 分解



线性代数 期末知识点复习



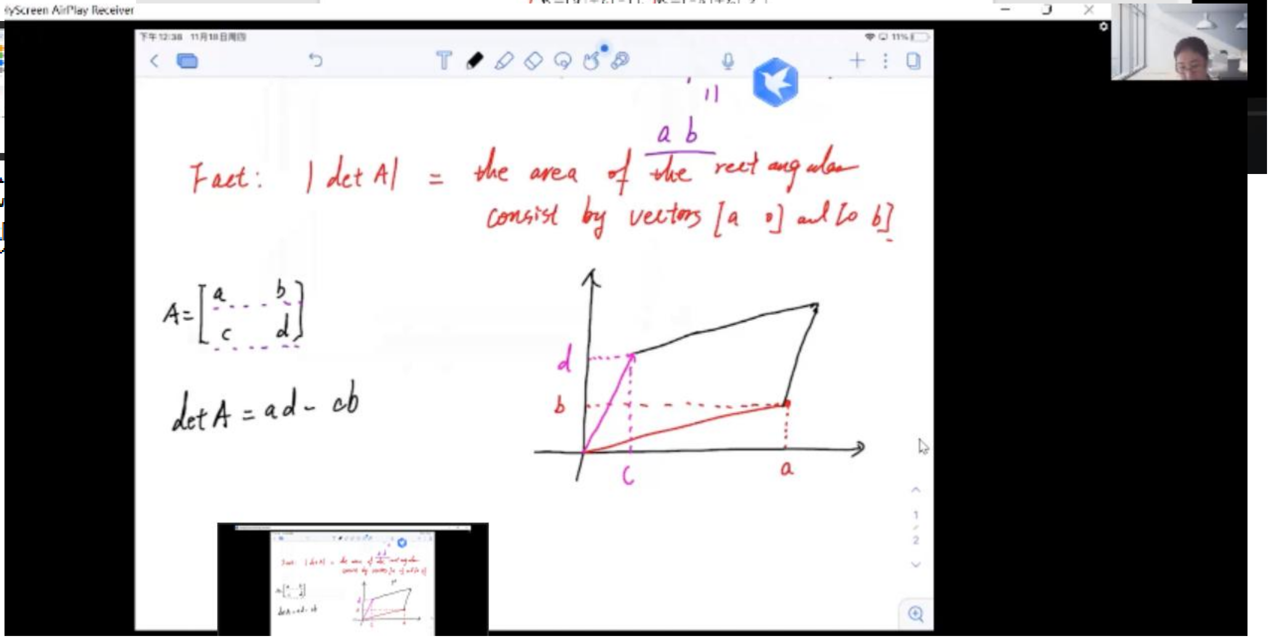
行列式



Solution In vector form, the equations of the two lines are

$$L_1: r=\begin{bmatrix}0\\9\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix} \text{ and } L_2: r=\begin{bmatrix}-6\\-5\\10\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\2\\4\end{bmatrix}.$$

where t,s are parameters. Let P_1 and P_2 be the end points of the common perpendicular, having position vectors r_1 and r_2 respectively, where



Fact: $|\det A| =$ the area of the $\overset{a\ b}{\text{rectangular}}$ consist by vectors $[a\ 0]$ and $[0\ b]$

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$\det A = ad - cb$

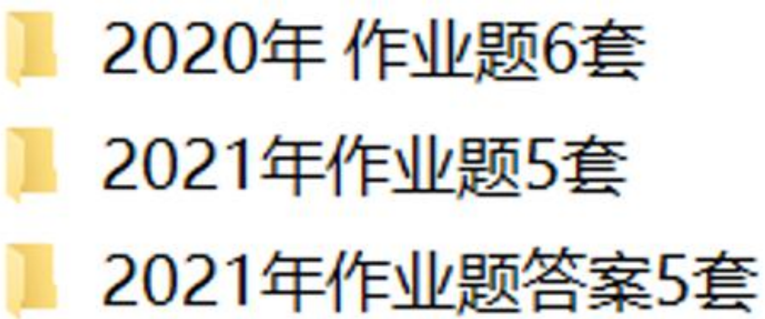
包括：作业题；

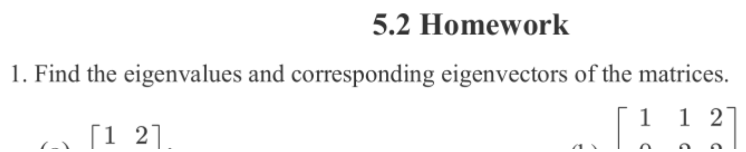
重点题型；

知识由来；

应用案例。

作业题（11套）

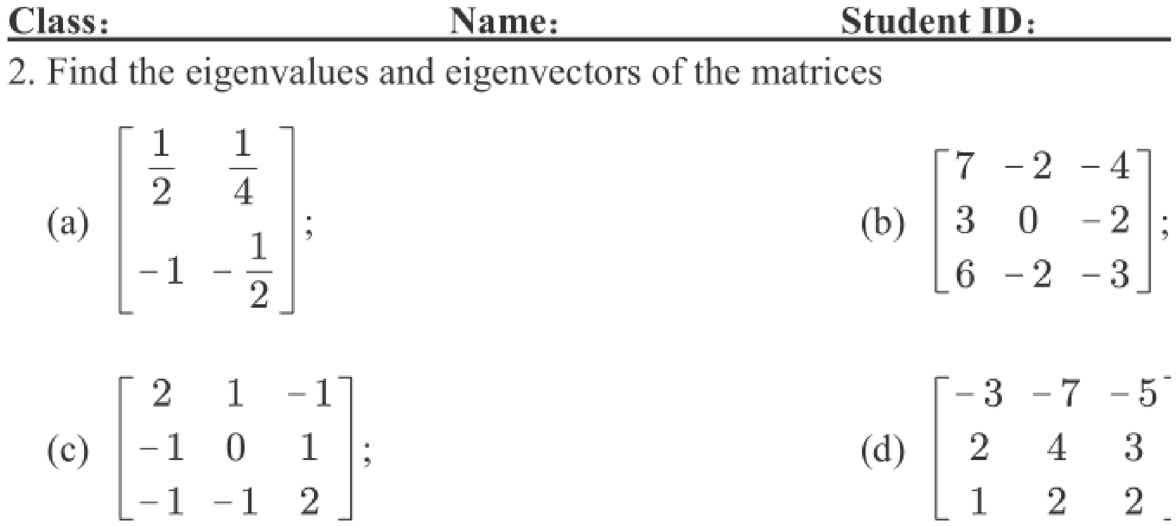




5.2 Homework

1. Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the matrices.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$



Class: **Name:** **Student ID:**

2. Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrices

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

章测试题共5套

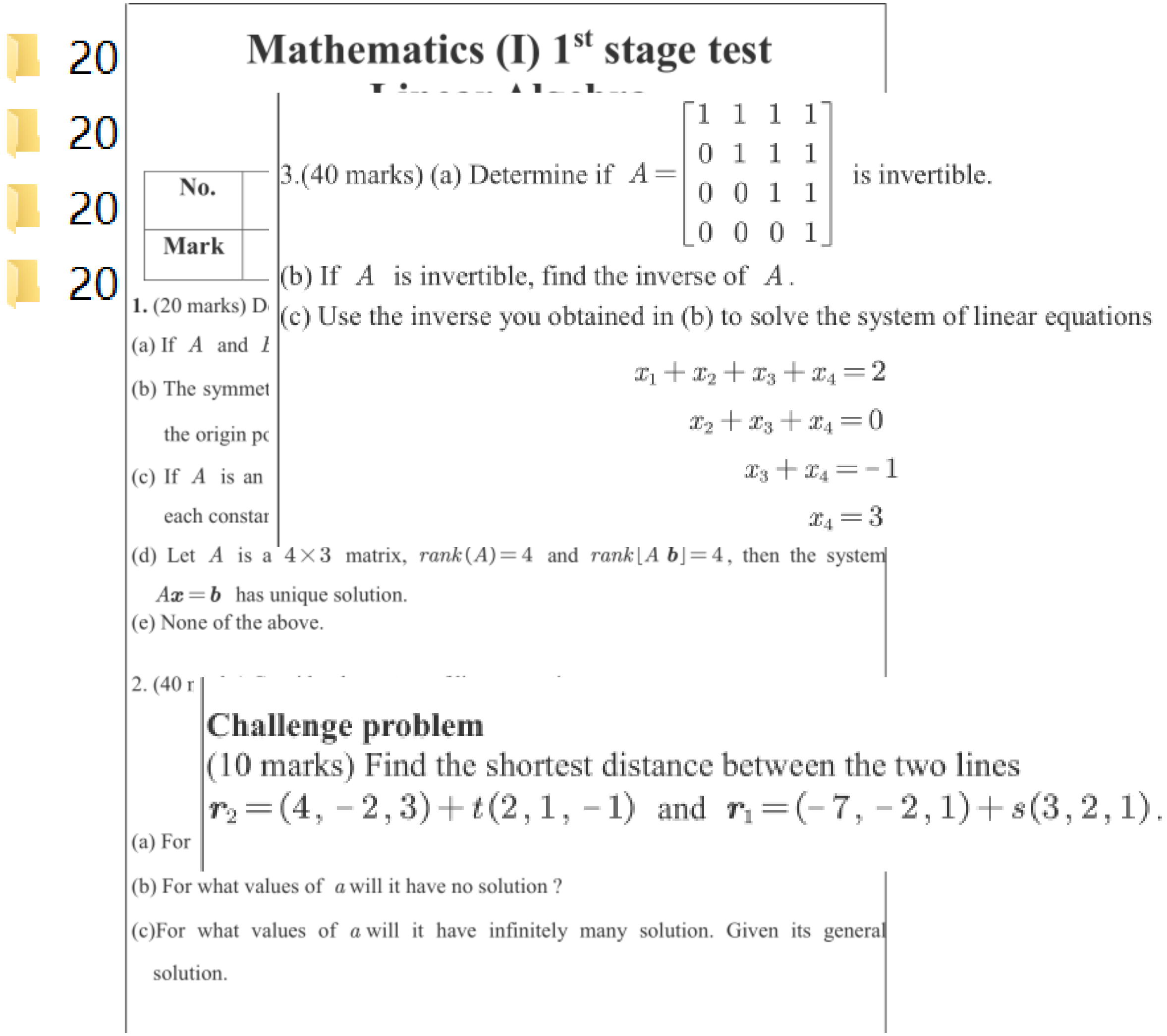
Chapter 1 Review test

1. Which of the following quantities is considered as a vector?
   (a) time (b) tempera
   (c) force (d) mass
2. Which of the following statements is
   (a) The vectors $(-4, -6, 10)$ anc
   (b) The line $x=1+5t, y=1-2t,$
   $2x+3y-4z=1$ are perpen
   (c) The cross product of two vectors i
   (d) If $\boldsymbol{a}$ is a unit vector, then $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$
3. $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$ if and only if
   (a) $\boldsymbol{a}=0$ or $\boldsymbol{b}=0$
   (c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
4. The symmetric equation of a line is
   (a) pass through the origin point $O(0$
   (b) pass through the origin point $O(0$
   (c) pass through the origin point $O(0$
   (d) pass through the origin point $O(($
5. Let $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^3$ and $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+$
   (a) $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}$ (b) $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}$ (c
6. If $\boldsymbol{a}=(3, 1, 0), \boldsymbol{b}=(-1, 2, 1)$
   $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})=$ ________.
7. Let $\boldsymbol{a}=(1, 2, -2), \boldsymbol{b}=(4, 3,$
8. Suppose $\boldsymbol{a}=(5x-2y, 4)$ and $\boldsymbol{b}=(2x-2y, 2y)$ are equal in $\mathbb{R}^2$, then
   $x=$ _____, $y=$ _____.
9. The area of the parallelogram determined by the vectors $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ is _____.
10. Parametric equation of the line is
$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=6-3t \\ z=-t-6 \end{cases}.$$
    The unit direction vector is _____.
11. Find symmetric equations for the line through the point $(7, 3, -5)$ that is parallel to $\frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-9}{6}$.
12. Find an equation of the plane containing the lines $x=t, y=4t, z=-2t$ and $x=1+t, y=1+4t, z=3-2t$.
13. A constant force of 10 N in the direction of $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ moves a block on a frictionless surface from $P_1(4, 1, 0)$ to $P_2(7, 4, 0)$, suppose distance is measured in meters. Find the work done.
14. Find the direction cosines and direction angles of the vector $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{4}\boldsymbol{k}$.
15. If $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, determine:
    (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;
    (b) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|$;
    (c) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;
    (d) the angle between $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$.

综合南安普顿历年期末试卷题型、国内线代典型题、考研题

阶段测试题共10套

期末测试题共8套



20

20

20

20

Mathematics (I) 1st stage test

No.	
Mark	

3.(40 marks) (a) Determine if $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ is invertible.

(b) If A is invertible, find the inverse of A.

(c) Use the inverse you obtained in (b) to solve the system of linear equations

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$x_2+x_3+x_4=0$$
$$x_3+x_4=-1$$
$$x_4=3$$

1. (20 marks) D

(a) If A and I

(b) The symmet

the origin pc

(c) If A is an

each constar

(d) Let A is a 4×3 matrix, $rank(A)=4$ and $rank[A\ \boldsymbol{b}]=4$, then the system $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ has unique solution.

(e) None of the above.

2. (40 r

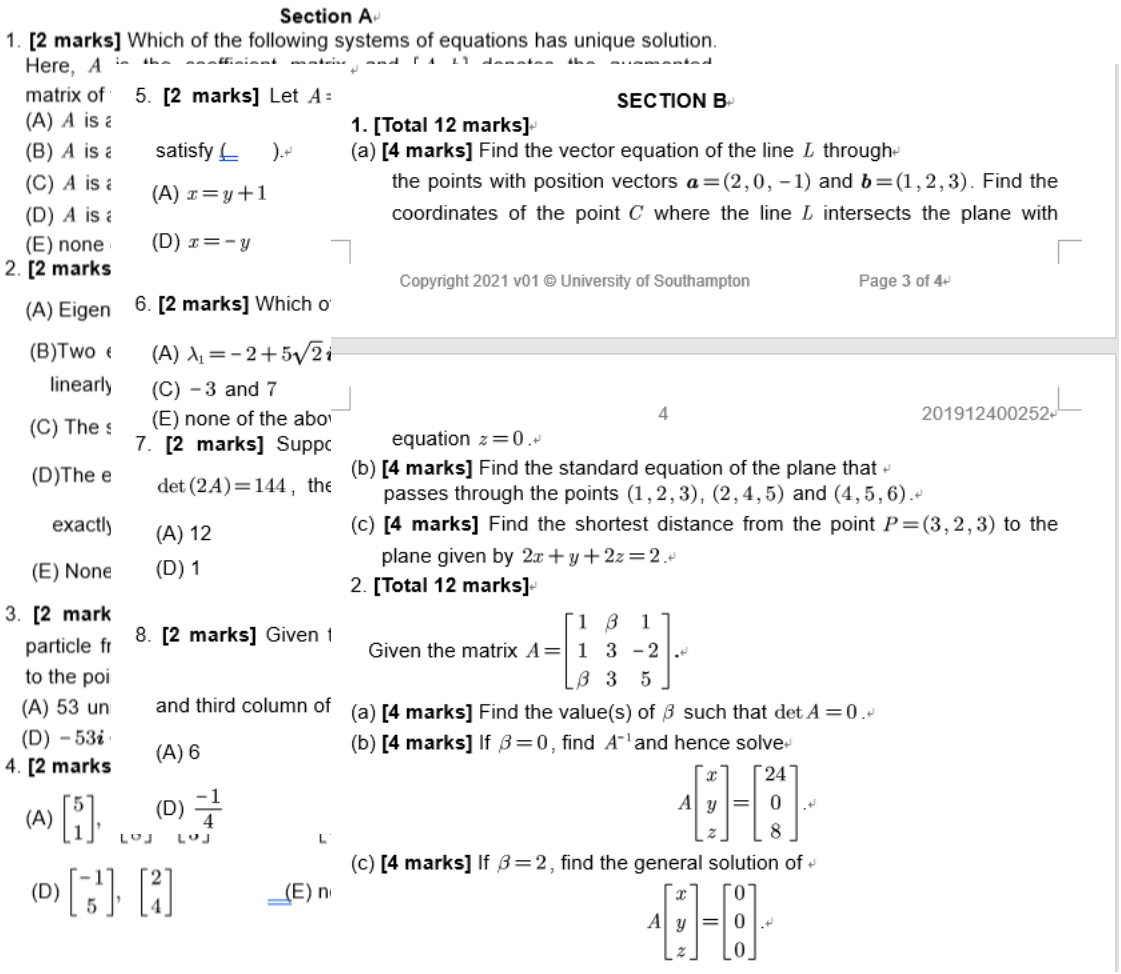
Challenge problem

(10 marks) Find the shortest distance between the two lines $\boldsymbol{r}_2=(4,-2,3)+t(2,1,-1)$ and $\boldsymbol{r}_1=(-7,-2,1)+s(3,2,1)$.

(a) For

(b) For what values of a will it have no solution ?

(c)For what values of a will it have infinitely many solution. Given its general solution.



Section A

1. **[2 marks]** Which of the following systems of equations has unique solution.
Here, A

matrix of

(A) A is a

(B) A is a

(C) A is a

(D) A is a

(E) none

2. **[2 marks**

(A) Eigen

(B)Two e

linearly

(C) The s

(D)The e

exactly

(E) None

3. **[2 mark**

particle fr

to the poi

(A) 53 uni

(D) $-53\boldsymbol{i}$

4. **[2 marks**

(A) $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$,

(D) $\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

5. **[2 marks]** Let $A=$

satisfy (　).

(A) $x=y+1$

(D) $x=-y$

6. **[2 marks]** Which o

(A) $\lambda_1=-2+5\sqrt{2}i$

(C) -3 and 7

(E) none of the abo

7. **[2 marks]** Suppo

$\det(2A)=144$, the

(A) 12

(D) 1

8. **[2 marks]** Given t

and third column of

(A) 6

(D) $\frac{-1}{4}$

(E) n

SECTION B

1. **[Total 12 marks]**

(a) **[4 marks]** Find the vector equation of the line L through the points with position vectors $\boldsymbol{a}=(2,0,-1)$ and $\boldsymbol{b}=(1,2,3)$. Find the coordinates of the point C where the line L intersects the plane with

Copyright 2021 v01 © University of Southampton　　Page 3 of 4

4　　201912400252

equation $z=0$.

(b) **[4 marks]** Find the standard equation of the plane that passes through the points $(1,2,3)$, $(2,4,5)$ and $(4,5,6)$.

(c) **[4 marks]** Find the shortest distance from the point $P=(3,2,3)$ to the plane given by $2x+y+2z=2$.

2. **[Total 12 marks]**

Given the matrix $A=\begin{bmatrix}1&\beta&1\\1&3&-2\\\beta&3&5\end{bmatrix}$.

(a) **[4 marks]** Find the value(s) of β such that $\det A=0$.

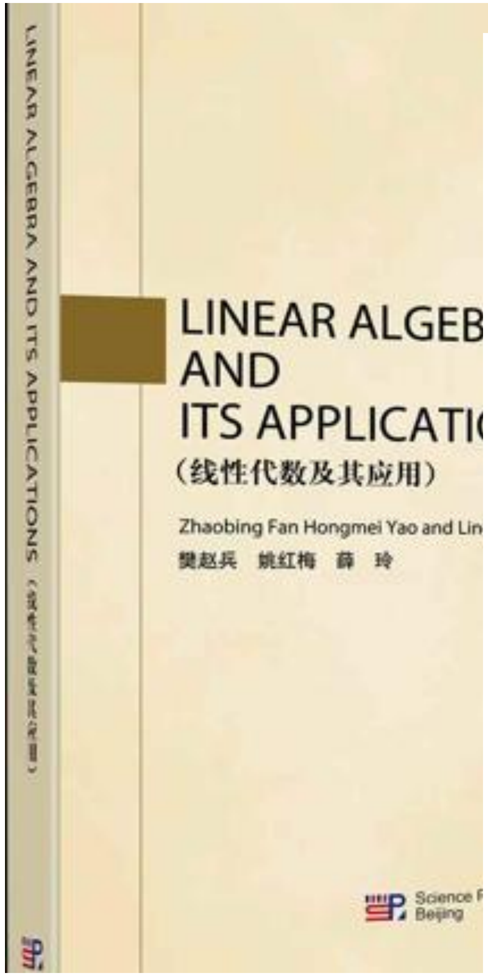
(b) **[4 marks]** If $\beta=0$, find A^{-1} and hence solve

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\0\\8\end{bmatrix}.$$

(c) **[4 marks]** If $\beta=2$, find the general solution of

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

教材（2024年科学出版社出版）



LINEAR ALGEB
AND
ITS APPLICATI
（线性代数及其应用）

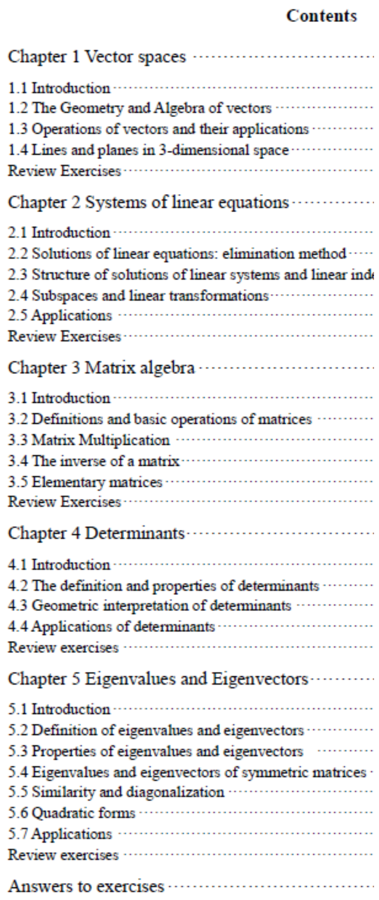
Zhaobing Fan Hongmei Yao and Lin
樊赵兵 姚红梅 薛 玲

Science P
Beijing

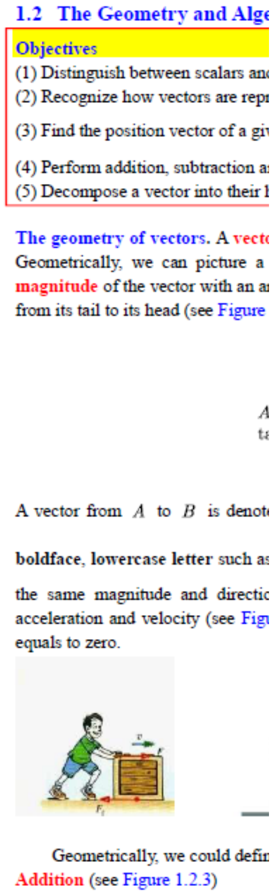
Linear algebra and

Zhaobing Fan Hongmei

Harbin Engineering



Contents



1.2 The Geometry and Alge

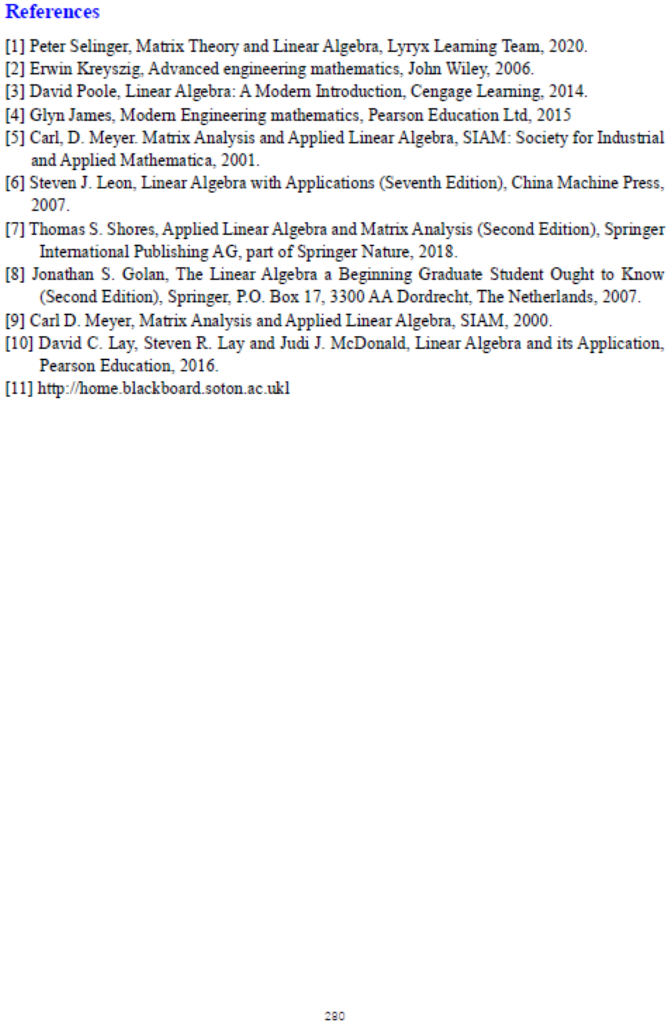
Objectives
(1) Distinguish between scalars an
(2) Recognize how vectors are repr
(3) Find the position vector of a giv
(4) Perform addition, subtraction a
(5) Decompose a vector into their

The geometry of vectors. A vecto
Geometrically, we can picture a
magnitude of the vector with an a
from its tail to its head (see Figure

A vector from A to B is denot

boldface, lowercase letter such as
the same magnitude and directio
acceleration and velocity (see Fig
equals to zero.

Geometrically, we could defin
Addition (see Figure 1.2.3)



References

[1] Peter Selinger, Matrix Theory and Linear Algebra, Lyryx Learning Team, 2020.
[2] Erwin Kreyszig, Advanced engineering mathematics, John Wiley, 2006.
[3] David Poole, Linear Algebra: A Modern Introduction, Cengage Learning, 2014.
[4] Glyn James, Modern Engineering mathematics, Pearson Education Ltd, 2015
[5] Carl, D. Meyer. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematica, 2001.
[6] Steven J. Leon, Linear Algebra with Applications (Seventh Edition), China Machine Press, 2007.
[7] Thomas S. Shores, Applied Linear Algebra and Matrix Analysis (Second Edition), Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018.
[8] Jonathan S. Golan, The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know (Second Edition), Springer, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 2007.
[9] Carl D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, 2000.
[10] David C. Lay, Steven R. Lay and Judi J. McDonald, Linear Algebra and its Application, Pearson Education, 2016.
[11] http://home.blackboard.soton.ac.ukl

280

全英文教学资源在智慧树平台上线，初步实现教学资源的数字化

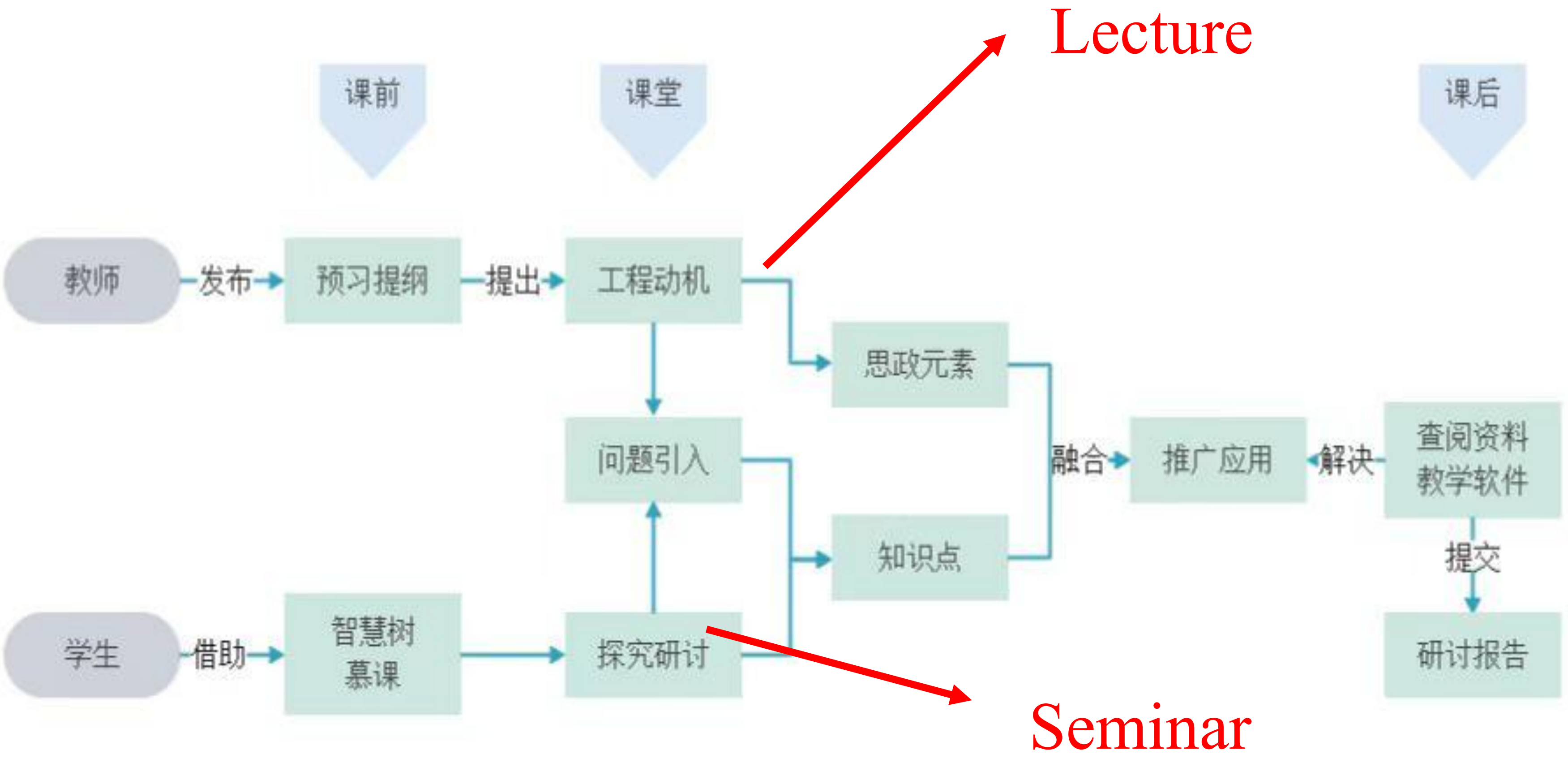
（3）教学模式创新：基于“自主、协作、生成”三段式的教学流程再造

创新教学模式与传统教学模式对比

教学阶段	传统教学模式	创新模式	核心亮点	待解决问题
自主	无课前预习（问题：课前无准备）	自主探究：学生在智慧树平台查找预习提纲，按预习提纲完成预习任务	从盲目到精准	学情可视化方面：没能达到平台自动生成报告形式； 个性化路径方面：没实现自动推送差异化学习资源
协作	教师讲，学生听（问题：课中被动沉默）	协作内化：教师精讲（靶向疑难知识点及工程引入背景等）与学生分组研讨（典型习题、具体工程应用问题）	从听讲到探究	仍有一些学生由于习惯灌输式教育而不适应目前教学模式，不能很好的参与讨论(研讨质量不能保证)
生成	完成标准化作业（问题：知识难以应用）	生成拓展：完成标准化作业，提交研讨报告，平台推送拓展性阅读及挑战性问题，学生自愿完成	从解题到创造	没能实现平台自主批阅及数据整合

具体教学模式展示

利用超星、智慧树网络教学平台，实现**线上与线下融合**教学，开启“**课前**预习+**课中**精讲与研讨并行+**课后**复习”的教学流程，具体见右侧面流程图。



Lecture课堂模式展示

工程动机驱动

注重几何直观

内容特色

Python算例

引入思政教育

高阶性创新性挑战度

教师如何教，教什么？

Lecture 课堂形式

从**科研视角**围绕“线性代数为什么会出现，它能够解决什么问题？对于线性代数中概念，为什么会提出，这个概念能干什么，能解决什么问题，能孕育什么思政素材？”设置精讲内容。

注重知识的创生背景及应用

用案例教

问题导向教

Lecture课堂

本质层面教

引导式、启发式

大班授课 每班约80人

Lecture课堂内容特色举例

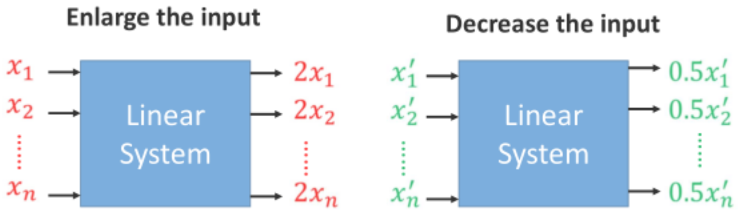
线性代数课程整体介绍

What are we going to learn?

Does it have solution?	Does it have unique solution?	How to find the solution?	How to describe this “set”?

1.Vector Algebra | 2. Linear system | 3. Matrix Algebra | 4.Determinants

Chapter 5

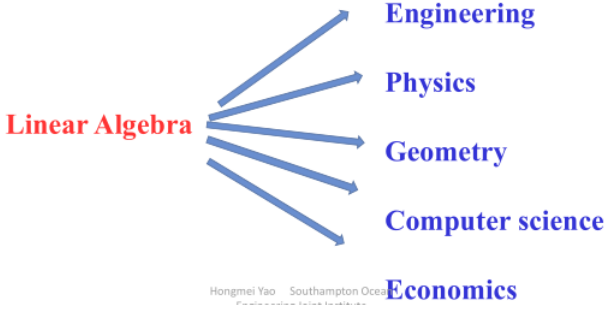


Eigenvalues and eigenvectors

Symmetric matrices and quadratic forms

Why should we study linear algebra?

After the 1900s, the **improvement** of linear algebra was more **technique** and in a way that correlative with **other disciplines** of mathematics than past.



Are you curious about the following phenomenon ?

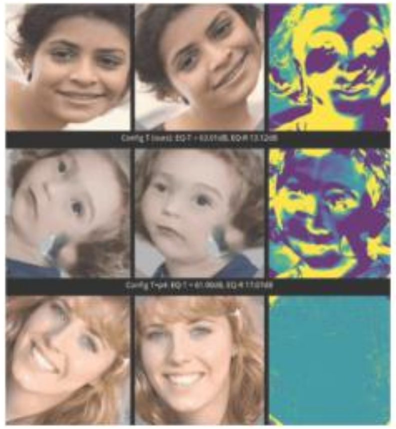
http://incomebully.com/does-pr-pagerank-still-matter/

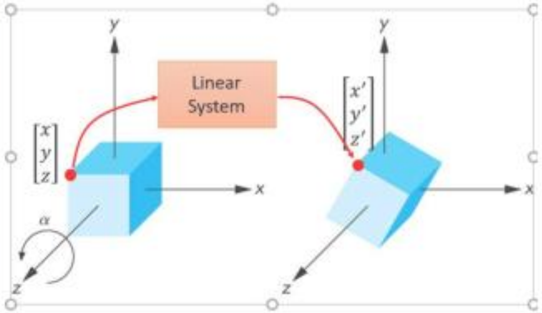
harbin engineering university

Harbin Engineering University - 百度百科

harbin engineering university | 哈尔滨工程大学

harbin engineering university - 百度翻译





http://www.c-jump.com/bcc/common/Talk3/Math/Matrices/Matrices.html

Collapse：Tacoma Narrows Bridge.mp

知识点由来背景及工程应用：与科研中探究问题背景、应用吻合

Chapter 1 Vectors Algebra

Outline:

1. Representations of vectors.
2. Operations of vectors.
3. Application-force

Irish mathematician
William Rowan Hamilton(1805-1865)
study of complex numbers， quaternions i
19th centry .

1. Why is it important to understand vectors?

Its usefulness in applications was realized in 20th centry

languages of science, mathematics and engineering.

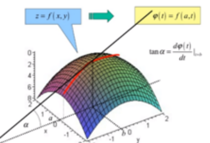
Applications

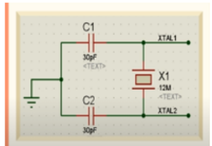
multivariable calculus

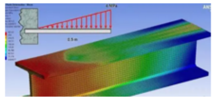
electrical circuits with oscillating currents

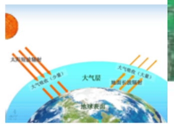
stress and strain in structures

flows of atmospher



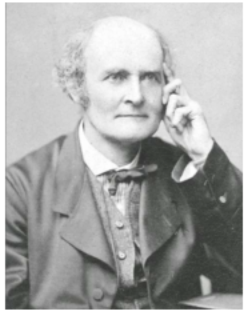






Chapter 3 Matrix algebra

3.1 Matrix basic operations
3.2 Matrix multiplication
3.3 The inverse of a Matrix
3.4 Applications



British mathematician Arthur Cayley (1821-1895)singled out the matrix as a separate entity and defined algebraic operations between matrices

1. Why is it important to understand matrices?

Over the last 150 years or so, matrix techniques have been developed

Applied in engineering and scientific problems

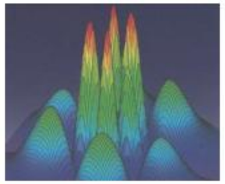
Applications

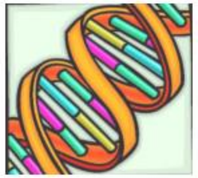
lectronics

Quantum mechanics

Genetics

Robotics





Chapter 5 Eigenvalues and Eigenvectors

Outline:

1. Eigenvalues and eigenvectors
2. Geometric interpretation
3. Diagonalization
4. Application

German mathematician Hilbert (1862-1943) first used the terms 'Eigenvalue' and 'Eigenvector' in 1904.

1. Why is it important to understand eigenvalues and eigenvectors?

Collapse: Tacoma Narrows Bridge.mp

Applications

differential equations

analysis of mechanical structures

design of car stereo systems

explore land for oil

French mathematician Jean d'Alembert in 18th Century

Tacoma Narrows Bridge

Pictures coming from https://image.baidu.com/

思政育人体现

The beauty of mathematics

In 2022, the most outstanding and influential mathematician Shing-Tung Yau was asked what was the charm of mathematics?

Shing-Tung Yau

The beauty of mathematics in physics

In 1951, Dirac was asked about his philosophy of physics during a lecture at Moscow University, and it was written on the blackboard (which is still preserved today)

Paul Adrien Maurice Dirac
Nobel Prize winner
in Physics
1902-1984

Origin of linear equations

The earliest recorded analysis of linear equations is found in the ancient Chinese book *Chiu-chang Suan-shu* written some time around 200 B.C.

民族文化自信

Let $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, then

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b$$

$$=\boxed{(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1\\ b_1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

简洁之

Hongmei Yao Southampton Ocea
Engineering Joint Institute

The triple scalar produc

$\boxed{(\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$

Geometrical interpretatio

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta\mathbf{k}$$

$$=(\text{area of the paralle}$$

Thus,

$$\boxed{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|}=(area$$

$$=(\text{area of } OACB)$$

$$=(\text{area of } OACB)$$

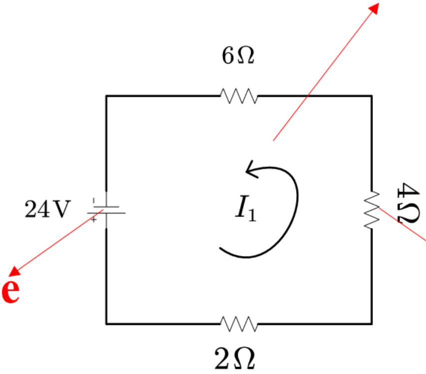
$$=\boxed{\text{volume of the pa}}$$

where h is the height of

2.4 Application: Electrical Networks

The tools of linear equations can be used to study the application of electrical networks. An example of an electrical circuit is below.

of a
are
hree
and
sold
each
ocre



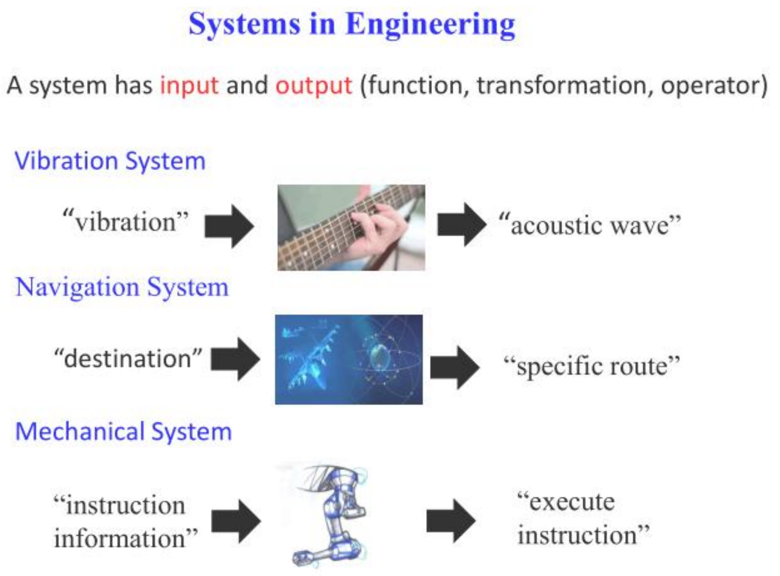
direction of current

voltage

resistor

应用之美

工程动机驱动与计算工具展示



Systems in Engineering

A system has input and output (function, transformation, operator)

Vibration System

"vibration" → "acoustic wave"

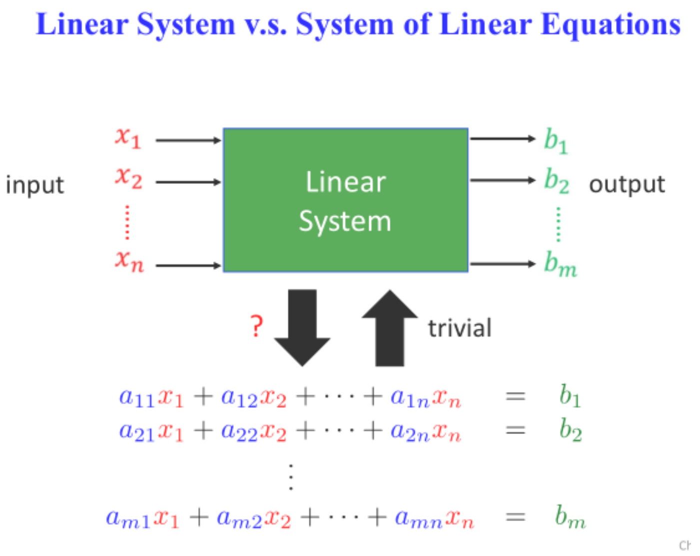
Navigation System

"destination" → "specific route"

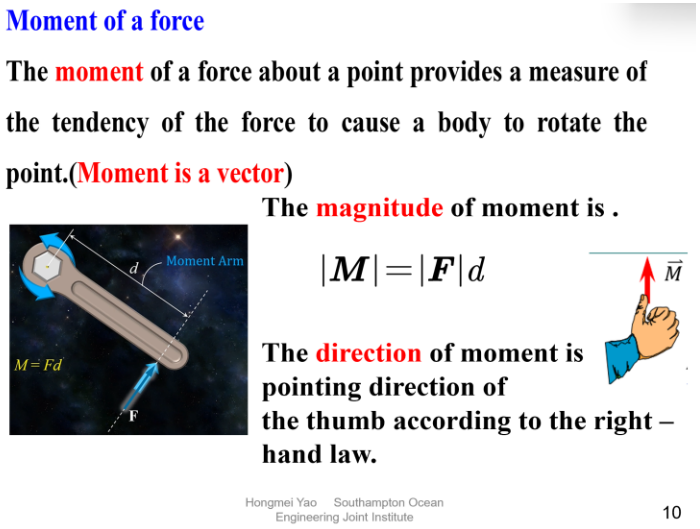
Mechanical System

"instruction information" → "execute instruction"

Linear System v.s. System of Linear Equations



$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$



Moment of a force

The moment of a force about a point provides a measure of the tendency of the force to cause a body to rotate the point.(Moment is a vector)

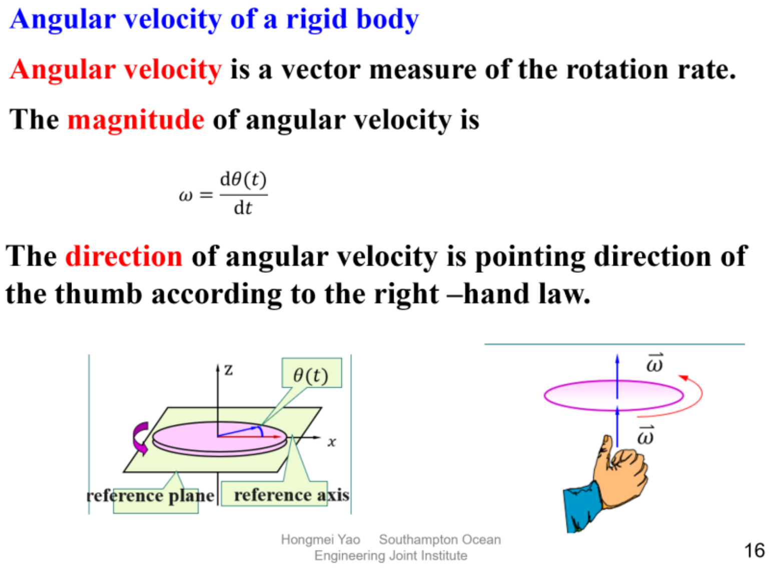
The magnitude of moment is .

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{F}|d$$

The direction of moment is pointing direction of the thumb according to the right –hand law.

Hongmei Yao Southampton Ocean Engineering Joint Institute

10



Angular velocity of a rigid body

Angular velocity is a vector measure of the rotation rate.

The magnitude of angular velocity is

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

The direction of angular velocity is pointing direction of the thumb according to the right –hand law.

Hongmei Yao Southampton Ocean Engineering Joint Institute

16

Python code:

```
import numpy as np;
def IsConsistent(X,y):
    if np.linalg.matrix_rank(X) == np.linalg.matrix_rank(np.c_[X,y]):
        if np.linalg.matrix_rank(X) == len(X):
            return 1
        else:
            return 2
       else:
        return 0
def Solving(X,y):
    if IsConsistent(X,y)==0:
        print("nonsisitent")
    if IsConsistent(X,y)==1:
        print(np.linalg.solve(X,y))
    if IsConsistent(X,y)==2:
        pass
A2 = np.array([[0,1,-4],[2,-3,2],[5,-8,7]])
b2 = np.array([8,1,1]).T
solution2 = Solving(A2,b2)
Result:
nonconsist
```

Seminar 课堂模式展示

基础知识

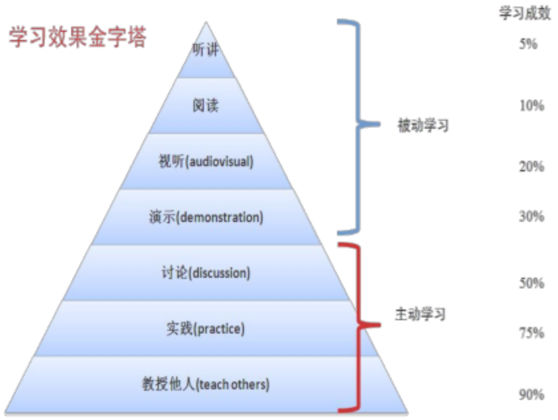
分层递进研讨题目

Seminar 课堂

工程应用问题

查阅资料

使学生由被动学习向主动学习转变



沉默式课堂
Silence
问答式课堂
Yes-No

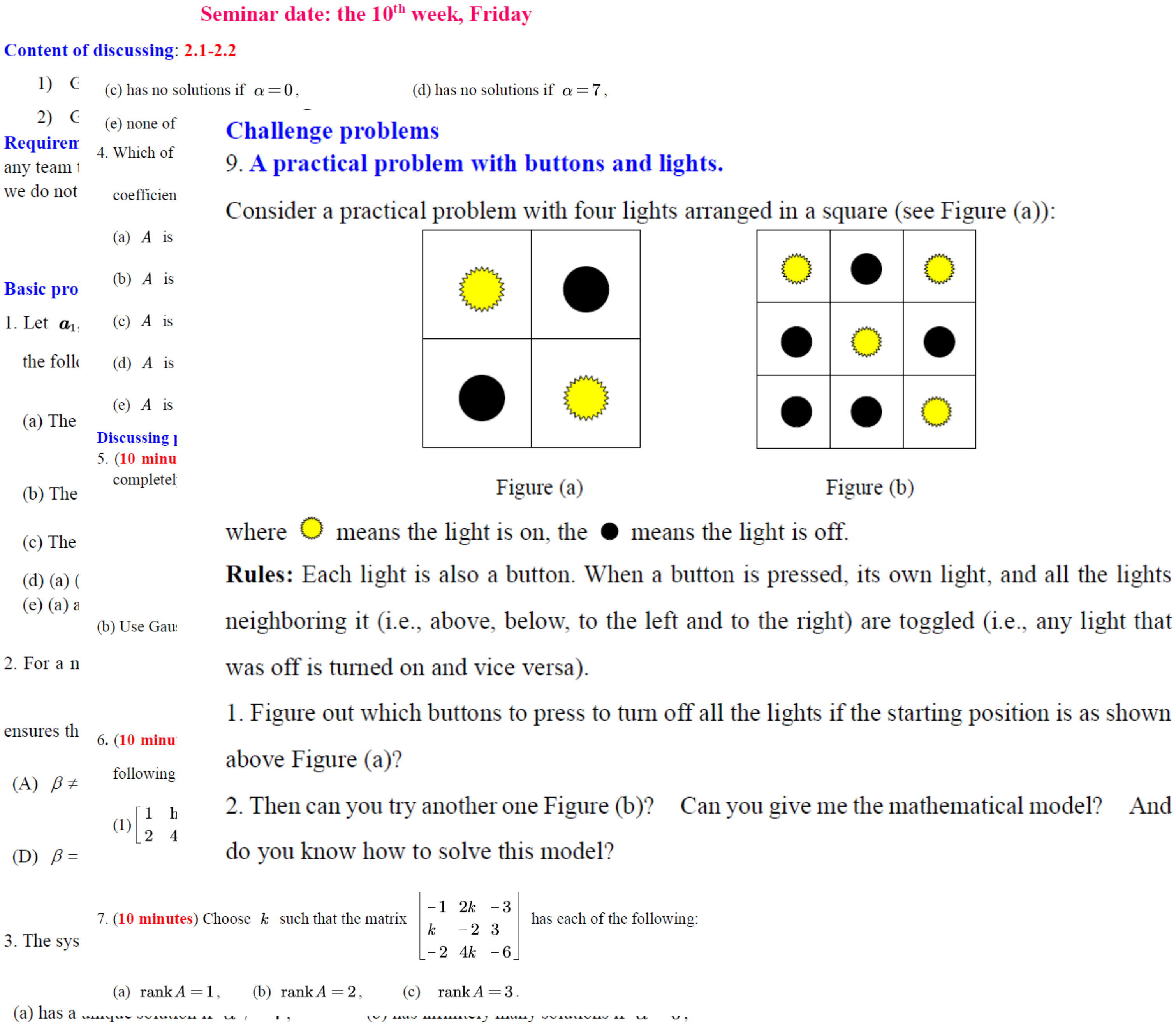
对话式课堂
Dialogue
思辨式课堂
Critical
争辩式课堂
Debate

学生如何学？

1. 预习与复习；
2. 讨论与辩论；
3. 习题巩固；
4. 课外阅读资料；
5. 解决应用案例，参与实践活动。

参与式、分组研讨式
将80人班级拆分三个小班
每个小班分约五组，以组记分模式。

Seminar 课堂研讨内容举例：以组为单位，每组约六人左右，共4或5组



Seminar date: the 10th week, Friday

Content of discussing: 2.1-2.2

1) C

2) C

Requirem

any team t

we do not

Basic pro

1. Let $\boldsymbol{a}_1$,

the foll

(a) The

(b) The

(c) The

(d) (a) (

(e) (a) a

2. For a n

ensures th

(A) $\beta \neq$

(D) $\beta =$

3. The sys

(a) has a

(c) has no solutions if $\alpha = 0$, (d) has no solutions if $\alpha = 7$,

(e) none of

4. Which of

coefficien

(a) A is

(b) A is

(c) A is

(d) A is

(e) A is

Discussing p

5. (**10 minu**

completel

(b) Use Gau

6. (**10 minu**

following

(1) $\begin{bmatrix} 1 & h \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

7. (**10 minutes**) Choose k such that the matrix $\begin{bmatrix} -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \\ -2 & 4k & -6 \end{bmatrix}$ has each of the following:

(a) rank $A=1$, (b) rank $A=2$, (c) rank $A=3$.

Challenge problems

9. **A practical problem with buttons and lights.**

Consider a practical problem with four lights arranged in a square (see Figure (a)):

Figure (a) Figure (b)

where ○ means the light is on, the ● means the light is off.

Rules: Each light is also a button. When a button is pressed, its own light, and all the lights neighboring it (i.e., above, below, to the left and to the right) are toggled (i.e., any light that was off is turned on and vice versa).

1. Figure out which buttons to press to turn off all the lights if the starting position is as shown above Figure (a)?

2. Then can you try another one Figure (b)? Can you give me the mathematical model? And do you know how to solve this model?

基础题：设为抢答环节；

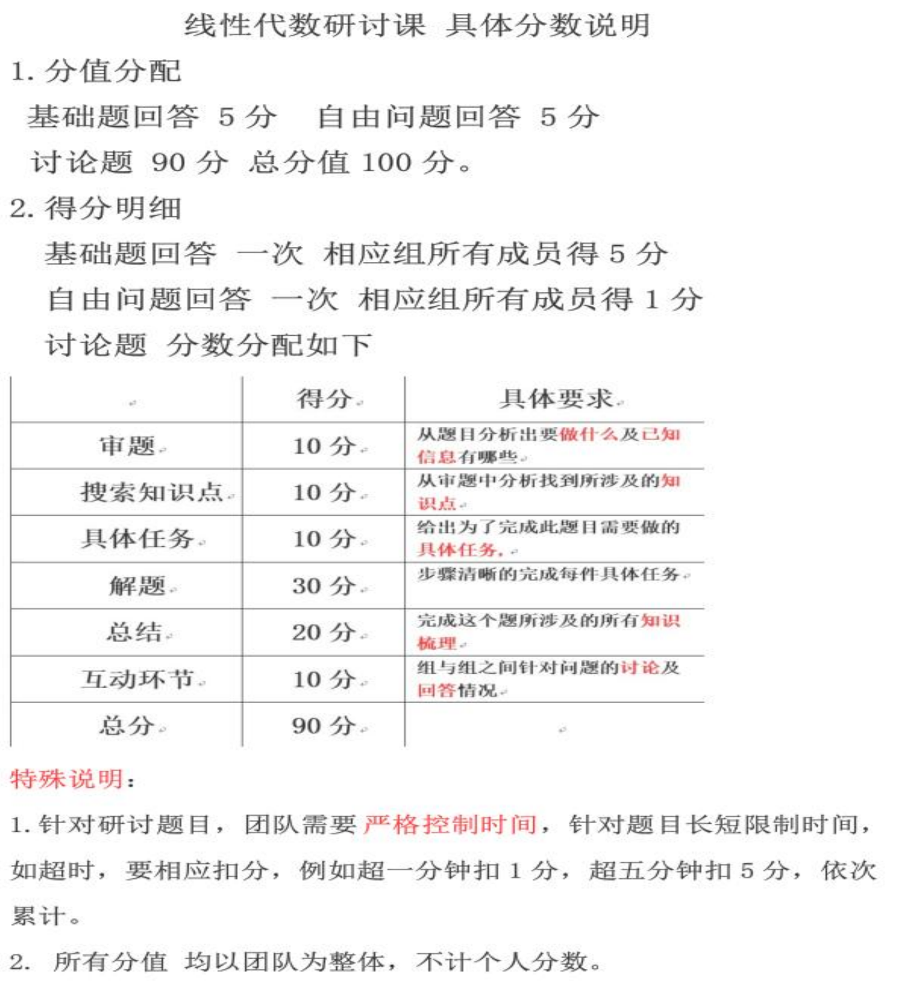
讨论题：团队成员自行分工，汇报讲解，组与组之间进行问答讨论；教师把控节奏，提炼存在问题进行深化总结

挑战题：要求学生给出完整解决方案和程序代码

（4）教学模式创新下的考核评价体系重构

过程性考核

教学阶段	创新模式	考核占比 100%
自主	**自主探究：**学生在智慧树平台查找预习提纲，按预习提纲完成预习任务	AI线上自测题 10%（中文版）出勤+课堂线上答题 5%
协作	**协作内化：**教师精讲（靶向疑难知识点及工程引入背景等）与**学生分组研讨**（典型习题、具体工程应用问题）	2次阶段测试 15%+研讨成绩 15%
生成	**生成拓展：**完成标准化作业，提交研讨报告，平台推送拓展性阅读及挑战性问题，学生自愿完成	作业15%+期末测试 40%



线性代数研讨课 具体分数说明

1. 分值分配

基础题回答 5 分 自由问题回答 5 分

讨论题 90 分 总分值 100 分。

2. 得分明细

基础题回答 一次 相应组所有成员得 5 分

自由问题回答 一次 相应组所有成员得 1 分

讨论题 分数分配如下

	得分	具体要求
审题	10 分	从题目分析出要做什么及已知信息有哪些
搜索知识点	10 分	从审题中分析找到所涉及的知识点
具体任务	10 分	给出为了完成此题目需要做的具体任务。
解题	30 分	步骤清晰的完成每件具体任务
总结	20 分	完成这个题所涉及的所有知识梳理
互动环节	10 分	组与组之间针对问题的讨论及回答情况
总分	90 分	

特殊说明：

1. 针对研讨题目，团队需要严格控制时间，针对题目长短限制时间，如超时，要相应扣分，例如超一分钟扣 1 分，超五分钟扣 5 分，依次累计。

2. 所有分值 均以团队为整体，不计个人分数。

课堂时长 120'00

签到率 › 95%

随机点名 › 0人

测验正确率 › 85%

（三）从联合学院“试点”到未来学院“辐射”的数智赋能（实现从数字化到数智化跃迁）

采纳创新教学模式+过程性考核

增加数智化

教学阶段	创新模式	考核模式	待解决问题
自主	**自主探究：**学生在智慧树平台查找预习提纲，按预习提纲完成预习任务	AI线上自测题10%+出勤5%	**学情可视化**方面：没能达到平台自动生成报告形式； **个性化路径**方面：没实现自动推送差异化学习资源
协作	**协作内化：**教师精讲（靶向疑难知识点及工程引入背景等）与**学生分组研讨**（典型习题、具体工程应用问题）	2次阶段测试15%+研讨成绩15%	仍有一些学生由于习惯灌输式教育而不适应目前教学模式，不能很好的参与讨论
生成	**生成拓展**：完成标准化作业，提交研讨报告，平台推送拓展性阅读及挑战性问题，学生自愿完成	作业15%+期末测试 40%	没能实现平台自主批阅及数据整合

AI助教赋能+个性化路劲资源推送

学情诊断与预警

未来学院教学模式展示

课前教学任务设计

教学计划

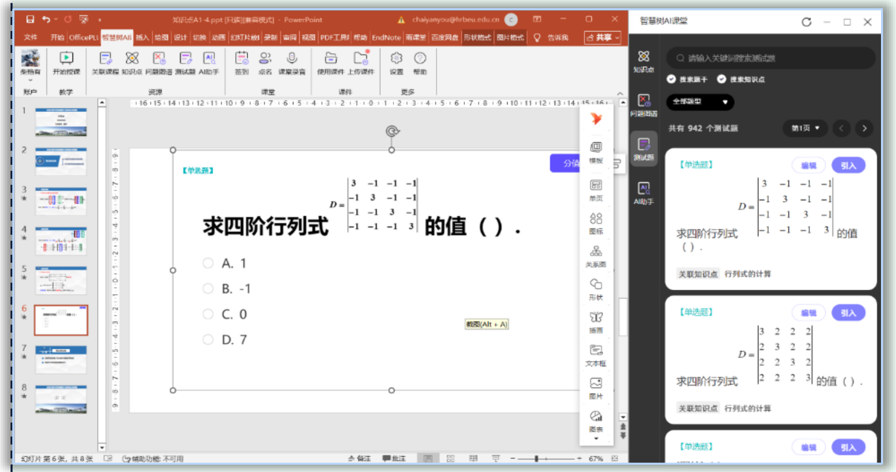
2023/8/21-2024/1/5 班级运行时间

2024/1/1-2024/1/5 课程测试

当周结束后5天 阶段测试截止时间

周次	教学内容	课时	课前任务	测试任务
第5周 (9.18 -9.24)	行列式 二阶行列式和三阶行列式 n元排列 n阶行列式 行列式的性质 行列式的计算 行列式按行(列)展开	5	查阅资料了解行列式的起源及工程应用	

◆ 课前发布预习任务



【单选题】

求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{vmatrix}$ 的值（）.

○ A. 1
○ B. -1
○ C. 0
○ D. 7

【单选题】

求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{vmatrix}$ 的值（）.

关联知识点 行列式的计算

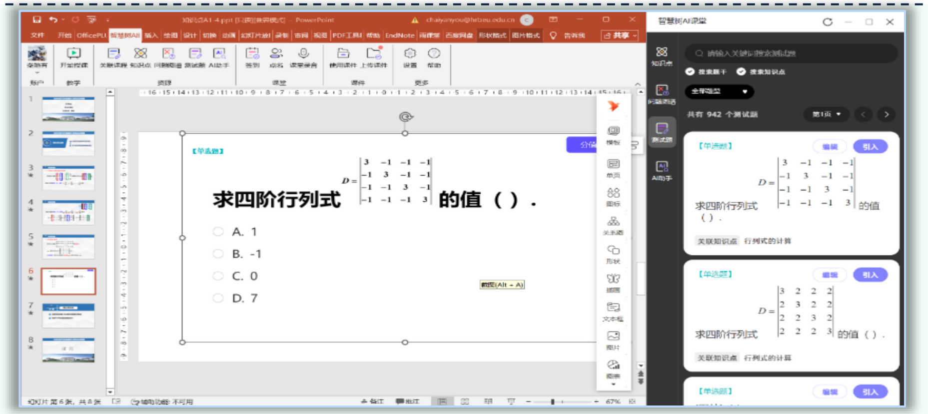
【单选题】

求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$ 的值（）.

关联知识点 行列式的计算

【单选题】

◆ AI助手辅助备课


【单选题】

求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{vmatrix}$ 的值（）.

○ A. 1
○ B. -1
○ C. 0
○ D. 7

共有 942 个测试题

【单选题】

求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{vmatrix}$ 的值（）.

关联知识点 行列式的计算

【单选题】

求四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$ 的值（）.

关联知识点 行列式的计算

【单选题】

◆ 关联测试题目

-课堂时光机-

上课次数	上课时长(分)	知识节点	题目测试(题)	签到人次
19	1153	0	0	1475

11月11日
星期一 15:19-17:19 120'0'
周一8-9，307，308，51

11月11日
星期一 07:49-09:49 120'0'
周一1-2，301-3

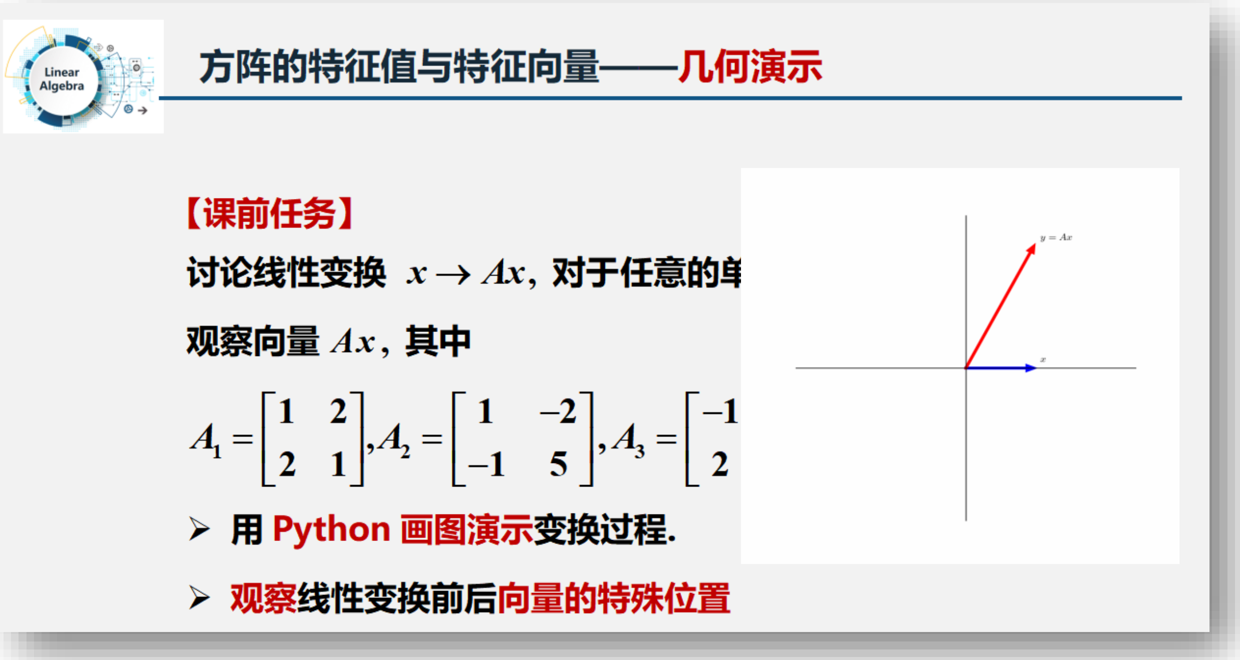
11月05日
星期二 13:18-15:18 120'0'
周二6-7，304-6

◆ 课堂教学报告

课中教学特色展示

实例引入 提出问题

几何直观



方阵的特征值与特征向量——几何演示

【课前任务】

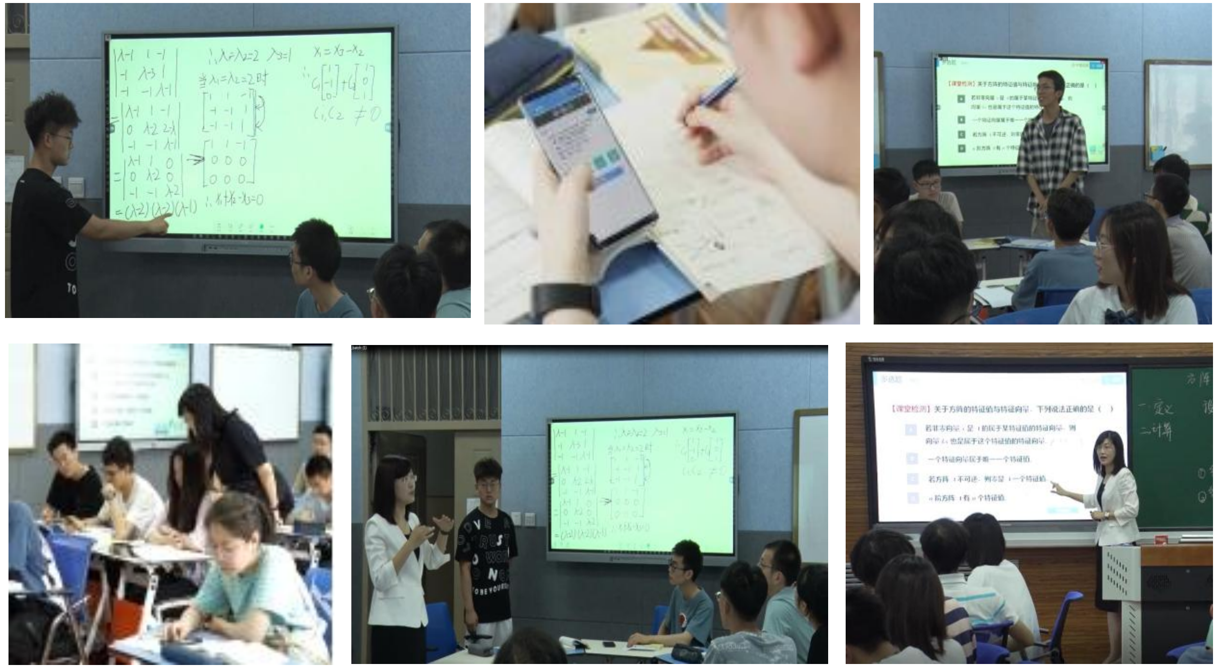
讨论线性变换 $x \to Ax$，对于任意的单

观察向量 Ax，其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, A_3 = \left[\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

- 用 Python 画图演示变换过程.
- 观察线性变换前后向量的特殊位置

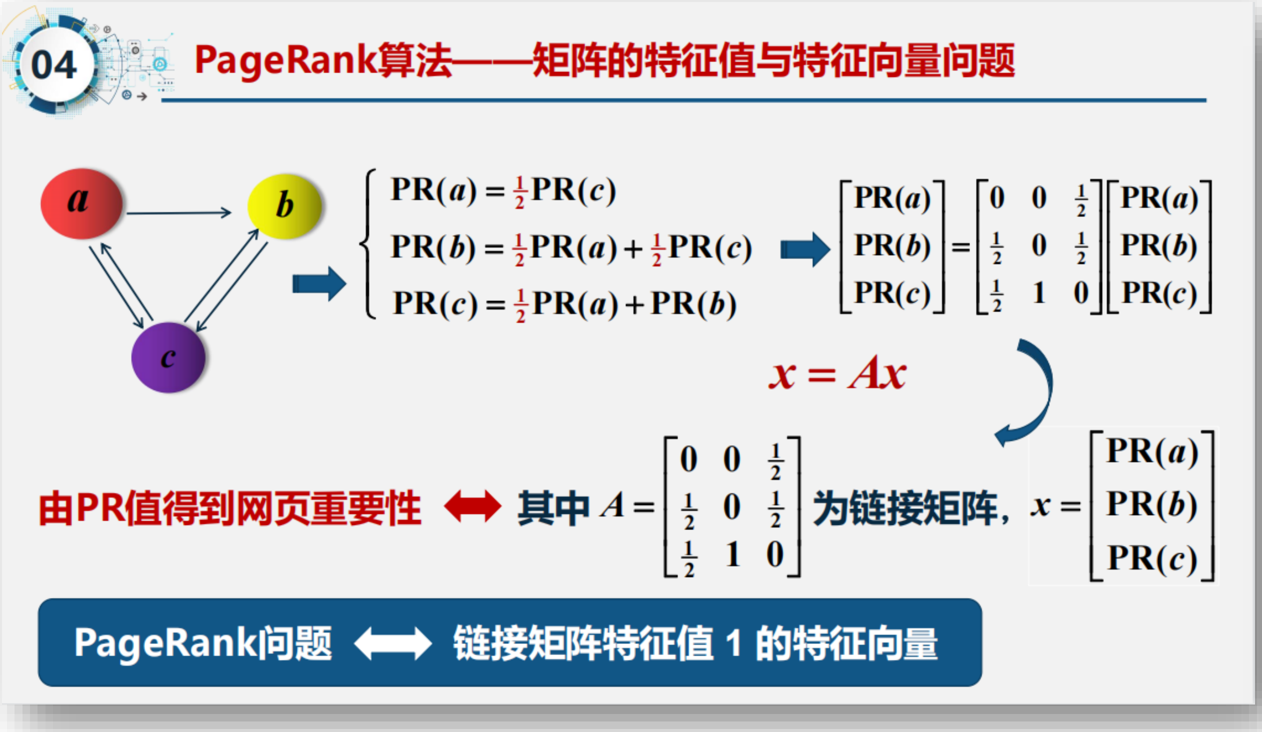
研讨课堂



合作式学习，生生互动+师生互动

课堂研讨支撑探究式教学 ——挖掘学生内在潜力，促进团队合作

应用案例举例



04

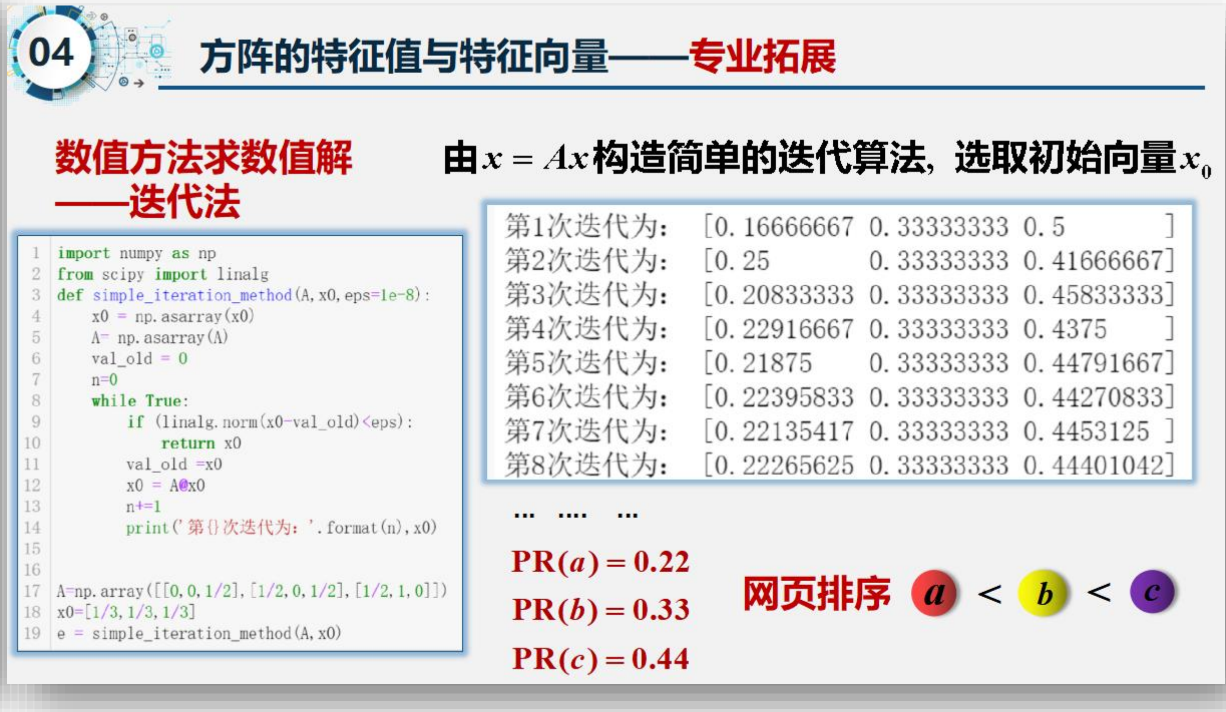
PageRank算法——矩阵的特征值与特征向量问题

$$\begin{cases} \mathrm{PR}(a)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(c) \\ \mathrm{PR}(b)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(a)+\frac{1}{2}\mathrm{PR}(c) \\ \mathrm{PR}(c)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(a)+\mathrm{PR}(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{PR}(a) \\ \mathrm{PR}(b) \\ \mathrm{PR}(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{PR}(a) \\ \mathrm{PR}(b) \\ \mathrm{PR}(c) \end{bmatrix}$$

$$x = Ax$$

由PR值得到网页重要性 ⟺ **其中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为链接矩阵，$x=\begin{bmatrix} \mathrm{PR}(a) \\ \mathrm{PR}(b) \\ \mathrm{PR}(c) \end{bmatrix}$**

PageRank问题 ⟷ 链接矩阵特征值 1 的特征向量



04

方阵的特征值与特征向量——专业拓展

数值方法求数值解——迭代法

由 $x = Ax$ 构造简单的迭代算法，选取初始向量 x_0

```python
import numpy as np
from scipy import linalg
def simple_iteration_method(A,x0,eps=1e-8):
    x0 = np.asarray(x0)
    A= np.asarray(A)
    val_old = 0
    n=0
    while True:
        if (linalg.norm(x0-val_old)<eps):
            return x0
        val_old =x0
        x0 = A@x0
        n+=1
        print('第{}次迭代为：'.format(n),x0)


A=np.array([[0,0,1/2],[1/2,0,1/2],[1/2,1,0]])
x0=[1/3,1/3,1/3]
e = simple_iteration_method(A,x0)
```

```
第1次迭代为：  [0.16666667 0.33333333 0.5       ]
第2次迭代为：  [0.25       0.33333333 0.41666667]
第3次迭代为：  [0.20833333 0.33333333 0.45833333]
第4次迭代为：  [0.22916667 0.33333333 0.4375    ]
第5次迭代为：  [0.21875    0.33333333 0.44791667]
第6次迭代为：  [0.22395833 0.33333333 0.44270833]
第7次迭代为：  [0.22135417 0.33333333 0.4453125 ]
第8次迭代为：  [0.22265625 0.33333333 0.44401042]
```

... .

$\mathrm{PR}(a) = 0.22$

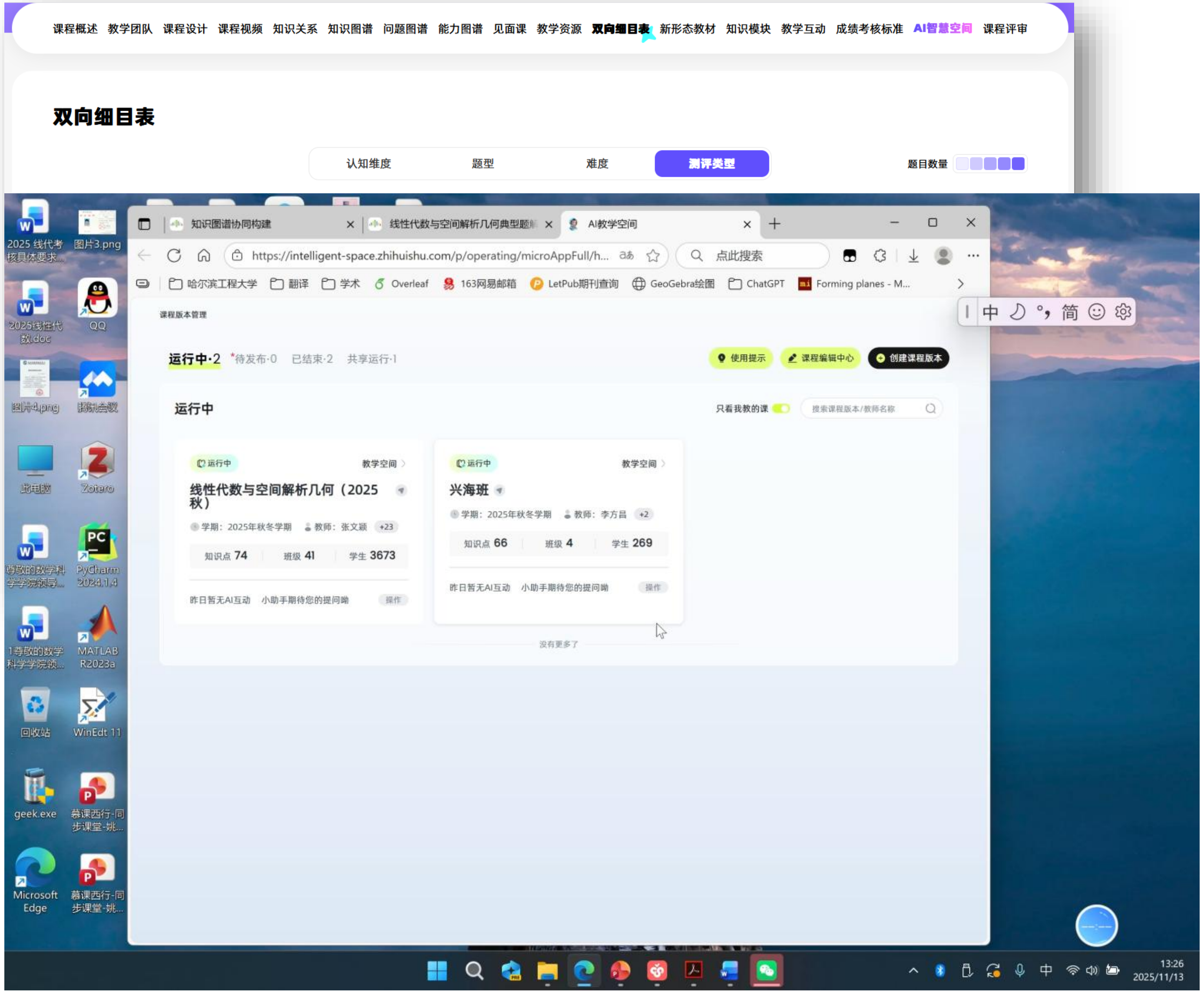
$\mathrm{PR}(b) = 0.33$

$\mathrm{PR}(c) = 0.44$

网页排序 a < b < c

培养学生利用数学知识解决实际问题的意识与能力

线上作业



双向细目表

https://intelligent-space.zhihuishu.com/p/operating/microAppFull/h...

课程版本管理

运行中·2 *待发布·0 已结束·2 共享运行·1

运行中

运行中

线性代数与空间解析几何（2025秋）

学期：2025年秋冬学期 教师：张文颖 +23

知识点 74 班级 41 学生 3673

昨日暂无AI互动 小助手期待您的提问哟

运行中

兴海班

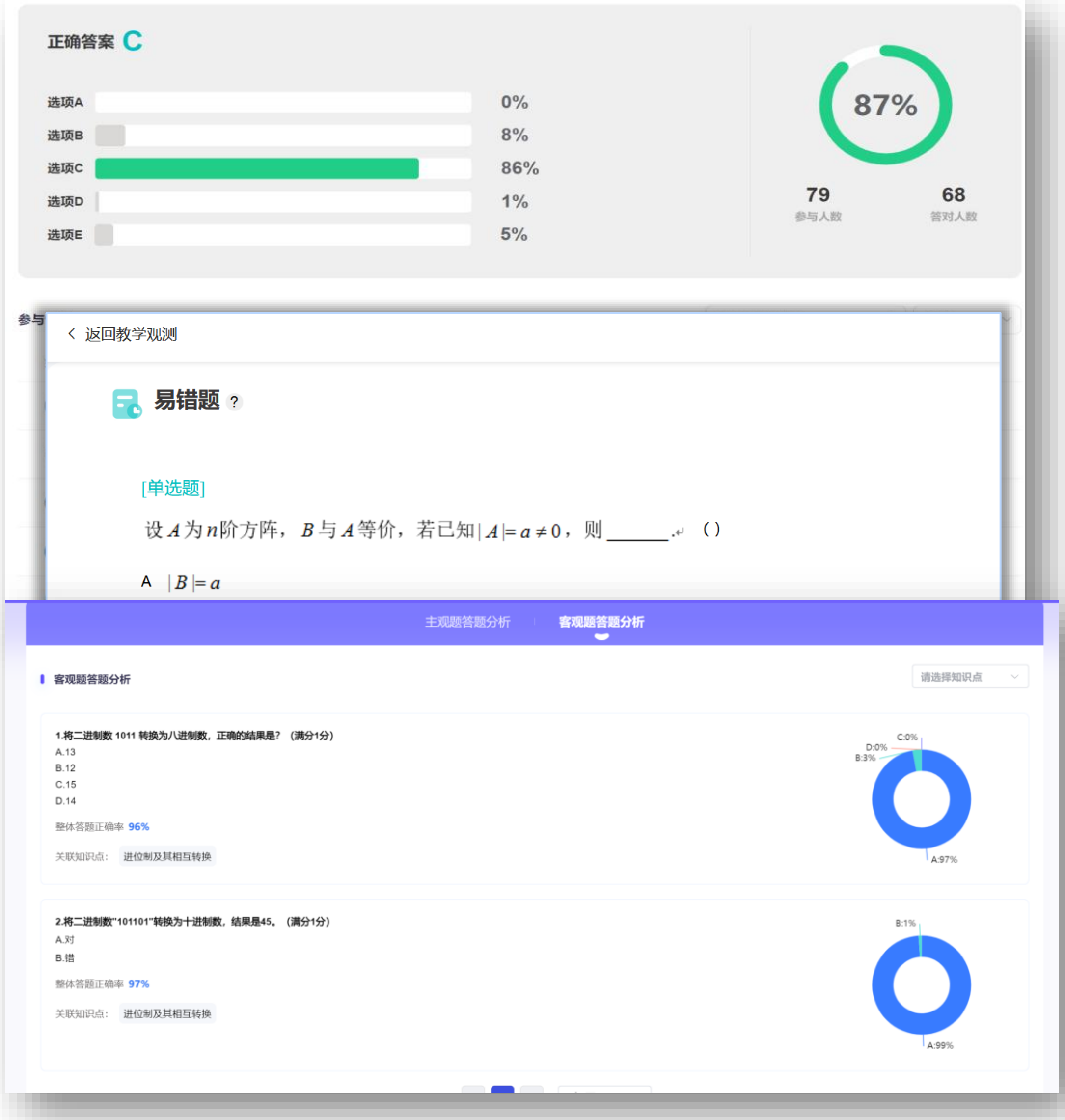
学期：2025年秋冬学期 教师：李方昌 +2

知识点 66 班级 4 学生 269

昨日暂无AI互动 小助手期待您的提问哟

没有更多了

数据分析反馈



正确答案 C

79 参与人数

68 答对人数

返回教学观测

易错题

[单选题]

设 A 为 n 阶方阵，B 与 A 等价，若已知 $|A|=a\neq0$，则 ______ （）

A $|B|=a$

主观题答题分析 客观题答题分析

客观题答题分析

1.将二进制数 1011 转换为八进制数，正确的结果是？（满分1分）
A.13
B.12
C.15
D.14

整体答题正确率 96%

关联知识点：进位制及其相互转换

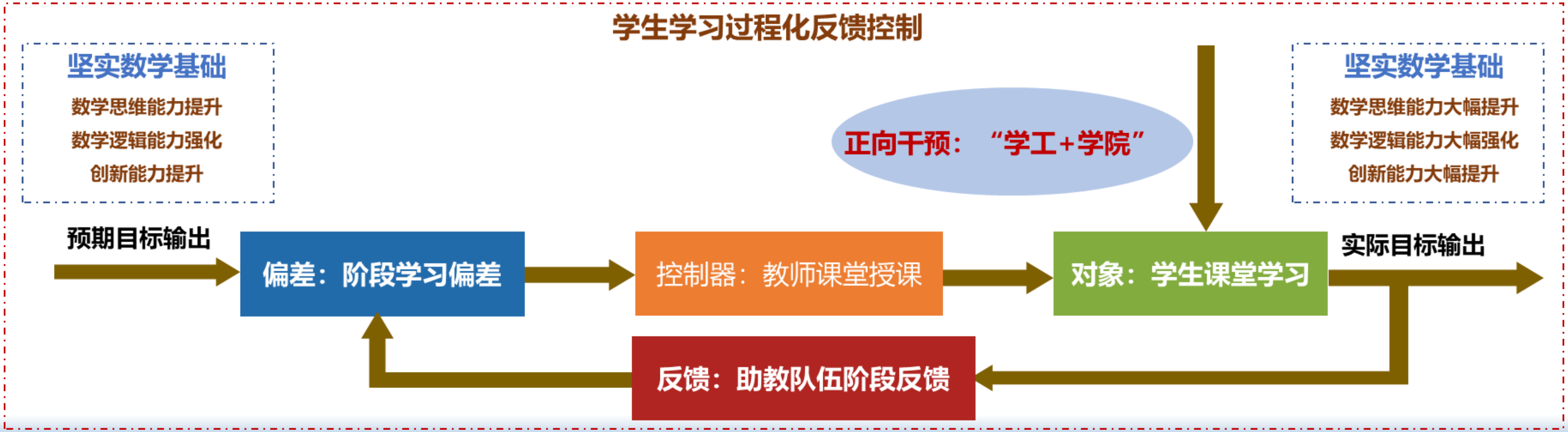
2.将二进制数"101101"转换为十进制数，结果是45。（满分1分）
A.对
B.错

整体答题正确率 97%

关联知识点：进位制及其相互转换

过程考核

强化过程性考核，增加了阶段测试环节，并建立闭环反馈机制，将学生知识点测试情况、阶段测试情况精准推送结果至课程负责人、任课教师、学工部、辅导员及学生，构筑多元协同教学新范式。



学生学习过程化反馈控制

坚实数学基础
数学思维能力提升
数学逻辑能力强化
创新能力提升

正向干预：“学工+学院”

坚实数学基础
数学思维能力大幅提升
数学逻辑能力大幅强化
创新能力大幅提升

预期目标输出

偏差：阶段学习偏差

控制器：教师课堂授课

对象：学生课堂学习

实际目标输出

反馈：助教队伍阶段反馈

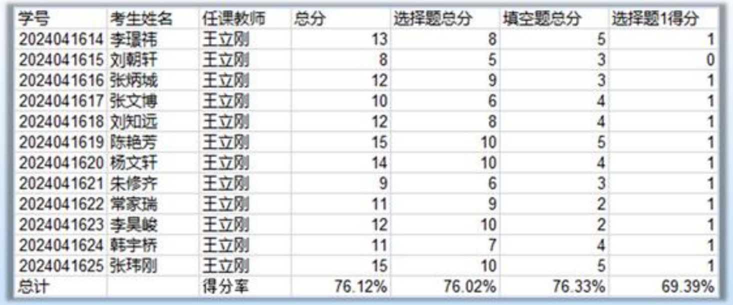
多维评价驱动教学知识量

2024级辅导员 (25)

【金山文档 | WPS云文档】
https://kdocs.cn/l/cgIhkY5L7Aa4
各位老师，这是数学学院助教统计的昨日课程未到课名单，供各位老师参考，如与实际情况有出入，各位老师可以直接在上面修改，辛苦各位老师

班级	人数	满分	平均分	平均分排名	中位数	最高分	最低分	满分数	满分率
全校	3325	15.00	11.91		12.00	15.00	2.00	422	12.69%
核能学院	263	15.00	12.43	3	13.00	15.00	6.00	38	14.45%
船舶学院	323	15.00	12.25	6	12.00	15.00	4.00	39	12.07%
软件学院	118	15.00	12.61	1	13.00	15.00	7.00	22	18.64%
智能学院	449	15.00	12.48	2	13.00	15.00	4.00	66	14.7%
信通学院	414	15.00	12.36	4	13.00	15.00	5.00	60	14.49%
水声学院	282	15.00	12.32	5	13.00	15.00	5.00	49	17.38%
计算机学院	169	15.00	12.06	7	12.00	15.00	4.00	26	15.38%
动能学院	264	15.00	11.73	8	12.00	15.00	3.00	23	8.71%
航建学院	306	15.00	11.42	9	12.00	15.00	4.00	41	13.40%
机电学院	333	15.00	11.23	11	12.00	15.00	3.00	22	6.61%
材化学院	330	15.00	10.41	12	11.00	15.00	2.00	23	6.97%
物理学院	31	15.00	11.32	10	12.00	15.00	5.00	5	16.13%

分析教学薄弱环节



学号	考生姓名	任课教师	总分	选择题总分	填空题总分	选择题1得分
2024041614	李璟祎	王立刚	13	8	5	1
2024041615	刘朝轩	王立刚	8	5	3	0
2024041616	张炳城	王立刚	12	9	3	1
2024041617	张文博	王立刚	10	6	4	1
2024041618	刘知远	王立刚	12	8	4	1
2024041619	陈艳芳	王立刚	15	10	5	1
2024041620	杨文轩	王立刚	14	10	4	1
2024041621	朱修齐	王立刚	9	6	3	1
2024041622	常家瑞	王立刚	11	9	2	1
2024041623	李昊峻	王立刚	12	10	2	1
2024041624	韩宇桥	王立刚	11	7	4	1
2024041625	张玮刚	王立刚	15	10	5	1
总计		得分率	76.12%	76.02%	76.33%	69.39%

过程考核数据辅助优化学习与教学策略

精准教学管理——学情雷达预警

学习风险评估，降低挂科风险

AI预测 学习风险　过程性 评价　即时教学 干预与提升

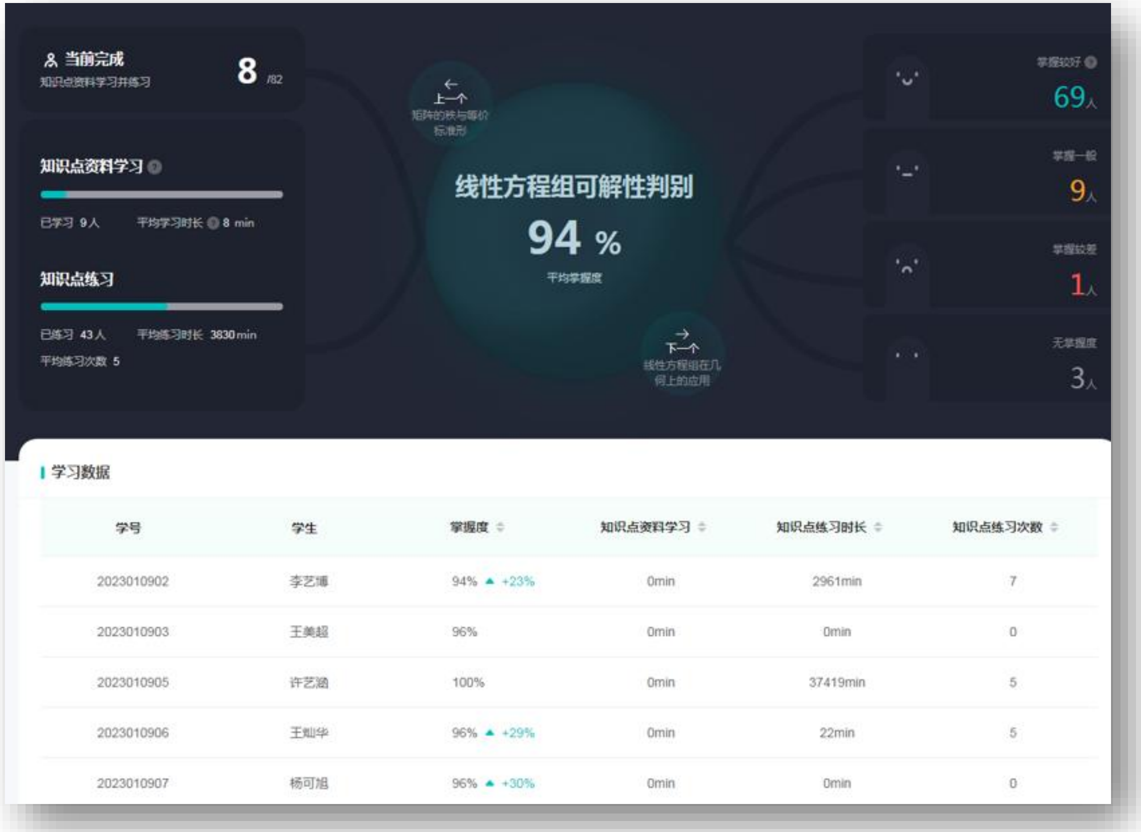
学生观测

2021级金融班 ▾ 学习中

● 高风险区 /共8人

姓名	掌握度	学习报告
[illegible]	5%	查看
马祥	7%	查看
[illegible]	9%	查看
[illegible]	9%	查看
[illegible]	6%	查看
[illegible]	3%	查看
[illegible]	10%	查看
[illegible]	2%	查看

学习情况总览，学习风险评估



当前完成 8 /82
知识点资料学习并练习

知识点资料学习
已学习 9人　平均学习时长 8 min

知识点练习
已练习 43人　平均练习时长 3830 min
平均练习次数 5

学习数据

学号	学生	掌握度	知识点资料学习	知识点练习时长	知识点练习次数
2023010902	李艺博	94% ▲ +23%	0min	2961min	7
2023010903	王美超	96%	0min	0min	0
2023010905	许艺涵	100%	0min	37419min	5
2023010906	王灿华	96% ▲ +29%	0min	22min	5
2023010907	杨可旭	96% ▲ +30%	0min	0min	0

知识点学习报告，动态调整教学侧重点

（四）数智赋能背景下线性代数课程改革的全校工科院系推行计划（未来计划）

目标

全校工科院系推广

难点

师资人力瓶颈与教学成本飙升；研讨质量保障与师资能力不均；教学空间与排课的现实冲突等。

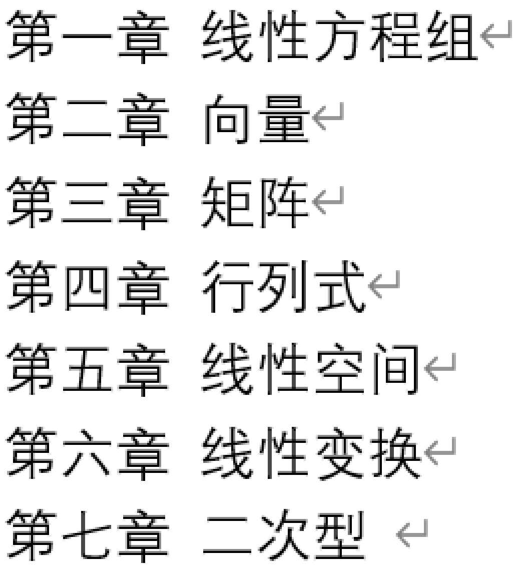
方案

联合学院完成新教学模式试点和未来学院数智赋能辐射，进行收集数据，验证有效性。

举措

整合优秀教师团队，开展集教学内容、交互应用、学情分析与专业融合于一体的数字教材编写工作。

数字教材编写



第一章 线性方程组↵
第二章 向量↵
第三章 矩阵↵
第四章 行列式↵
第五章 线性空间↵
第六章 线性变换↵
第七章 二次型 ↵

主要特色

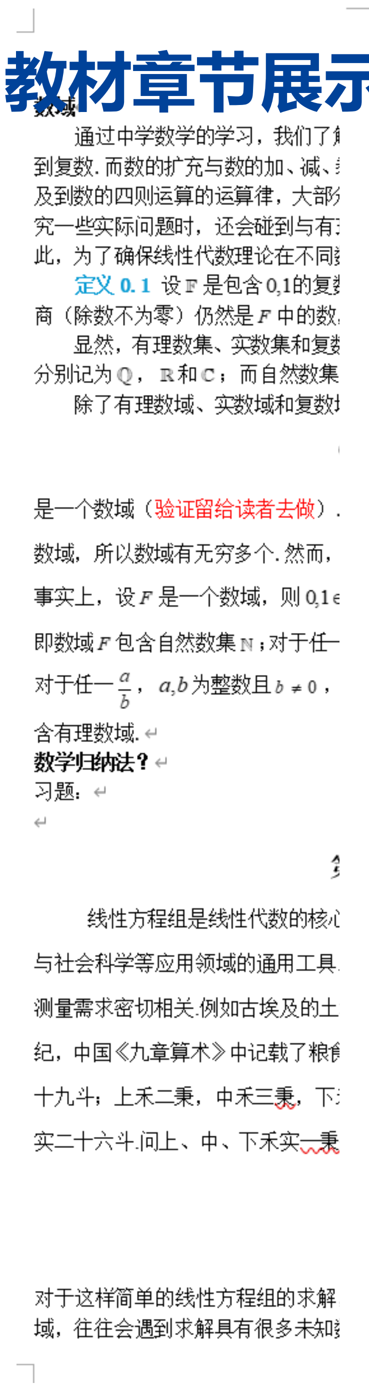
1.增设交互式实验，实现动态几何直观化，实现学生实际动手操作能力。

2.引入模块化设计，有知识点引入视频、讲解视频及典型解析视频，实现因材施教、按需学习。

3. 增加工程应用案例及与应用有关的习题。

4.Python实验设计。

教材章节展示



数域

通过中学数学的学习，我们了解

到复数. 而数的扩充与数的加、减、

及到数的四则运算的运算律，大部

究一些实际问题时，还会碰到与有

此，为了确保线性代数理论在不同

定义 0.1 设 F 是包含 0,1的复

商（除数不为零）仍然是 F 中的数

显然，有理数集、实数集和复

分别记为 Q，R 和 C；而自然数集

除了有理数域、实数域和复数

是一个数域（验证留给读者去做）.

数域，所以数域有无穷多个. 然而，

事实上，设 F 是一个数域，则 0,1∈

即数域 F 包含自然数集 N；对于任一

对于任一 $\frac{a}{b}$， a,b 为整数且 $b\neq 0$，

含有理数域.

数学归纳法？

习题：

线性方程组是线性代数的核心

与社会科学等应用领域的通用工具

测量需求密切相关.例如古埃及的土

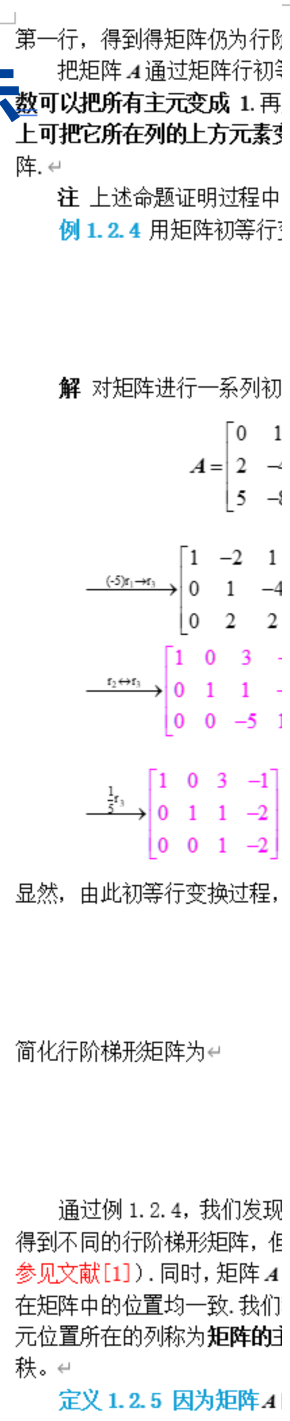
纪，中国《九章算术》中记载了粮

十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下

实二十六斗.问上、中、下禾实一秉

对于这样简单的线性方程组的求解

域，往往会遇到求解具有很多未知



第一行，得到得矩阵仍为行阶

把矩阵 A 通过矩阵行初等

数可以把所有主元变成 1. 再

上可把它所在列的上方元素

阵.

注 上述命题证明过程中

例 1.2.4 用矩阵初等行

解 对矩阵进行一系列初

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -\\ 5 & -\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{(-5)r_1\to r_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

显然，由此初等行变换过程，

简化行阶梯形矩阵为

通过例 1.2.4，我们发现

得到不同的行阶梯形矩阵，但

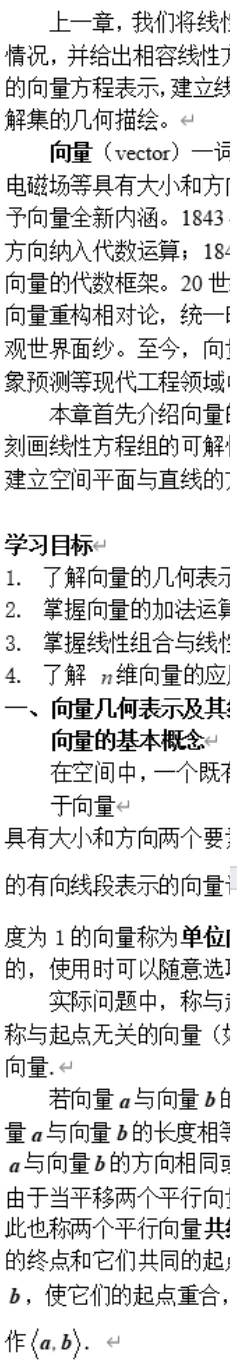
参见文献[1]）. 同时，矩阵 A

在矩阵中的位置均一致. 我们

元位置所在的列称为**矩阵的主**

秩。

定义 1.2.5 因为矩阵 A



上一章，我们将线性

情况，并给出相容线性方

的向量方程表示，建立线

解集的几何描绘。

向量（vector）一词

电磁场等具有大小和方向

予向量全新内涵。1843

方向纳入代数运算；184

向量的代数框架。20 世

向量重构相对论，统一时

观世界面纱。至今，向

象预测等现代工程领域

本章首先介绍向量的

刻画线性方程组的可解性

建立空间平面与直线的方

学习目标

1. 了解向量的几何表示
2. 掌握向量的加法运算
3. 掌握线性组合与线性
4. 了解 n 维向量的应

一、向量几何表示及其

向量的基本概念

在空间中，一个既有

于向量

具有大小和方向两个要

的有向线段表示的向量

度为 1 的向量称为**单位**

的，使用时可以随意选

实际问题中，称与

称与起点无关的向量（

向量.

若向量 **a** 与向量 **b** 的

量 **a** 与向量 **b** 的长度相等

a 与向量 **b** 的方向相同

由于当平移两个平行向

此也称两个平行向量**共**

的终点和它们共同的起

b，使它们的起点重合，

作 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

应用 1（颜色

绿、蓝光的强

（可参考

图 2.6 （

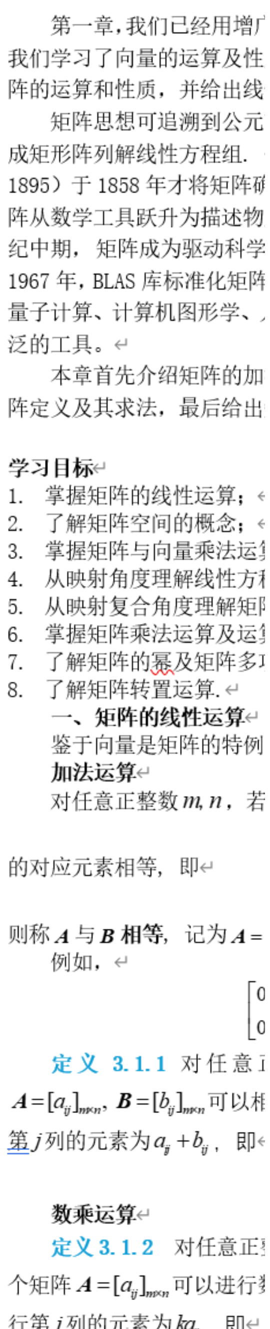
应用 2（飞机

（经度、纬度

定飞机的姿态

应用 3（二维

量数据并通过



第一章，我们已经用增广

我们学习了向量的运算及性

阵的运算和性质，并给出线

矩阵思想可追溯到公元

成矩形阵列解线性方程组.

1895）于 1858 年才将矩阵

阵从数学工具跃升为描述物

纪中期，矩阵成为驱动科学

1967 年，BLAS 库标准化矩阵

量子计算、计算机图形学、

泛的工具。

本章首先介绍矩阵的加

阵定义及其求法，最后给出

学习目标

1. 掌握矩阵的线性运算；
2. 了解矩阵空间的概念；
3. 掌握矩阵与向量乘法运
4. 从映射角度理解线性方
5. 从映射复合角度理解矩
6. 掌握矩阵乘法运算及运
7. 了解矩阵的幂及矩阵多
8. 了解矩阵转置运算.

一、矩阵的线性运算

鉴于向量是矩阵的特例

加法运算

对任意正整数 m, n，若

的对应元素相等，即

则称 **A** 与 **B** 相等，记为 $\boldsymbol{A}=$

例如，

定义 3.1.1 对任意

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$ 可以相

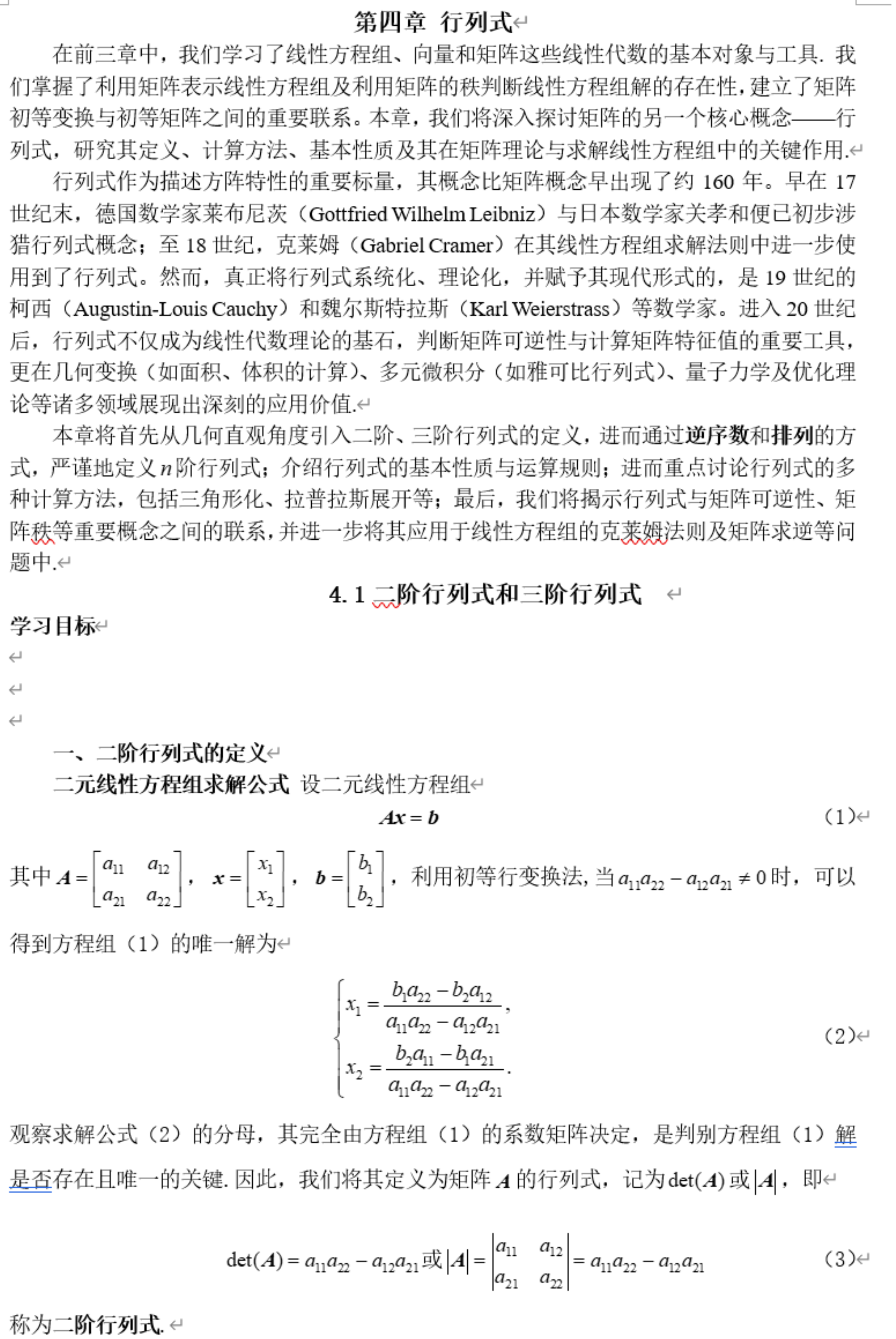
第 j 列的元素为 $a_{ij}+b_{ij}$，即

数乘运算

定义 3.1.2 对任意正

个矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 可以进行

行第 j 列的元素为 ka_{ij}，即



第四章 行列式

在前三章中，我们学习了线性方程组、向量和矩阵这些线性代数的基本对象与工具. 我们掌握了利用矩阵表示线性方程组及利用矩阵的秩判断线性方程组解的存在性，建立了矩阵初等变换与初等矩阵之间的重要联系。本章，我们将深入探讨矩阵的另一个核心概念——行列式，研究其定义、计算方法、基本性质及其在矩阵理论与求解线性方程组中的关键作用.

行列式作为描述方阵特性的重要标量，其概念比矩阵概念早出现了约 160 年。早在 17 世纪末，德国数学家莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）与日本数学家关孝和便已初步涉猎行列式概念；至 18 世纪，克莱姆（Gabriel Cramer）在其线性方程组求解法则中进一步使用到了行列式。然而，真正将行列式系统化、理论化，并赋予其现代形式的，是 19 世纪的柯西（Augustin-Louis Cauchy）和魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）等数学家。进入 20 世纪后，行列式不仅成为线性代数理论的基石，判断矩阵可逆性与计算矩阵特征值的重要工具，更在几何变换（如面积、体积的计算）、多元微积分（如雅可比行列式）、量子力学及优化理论等诸多领域展现出深刻的应用价值.

本章将首先从几何直观角度引入二阶、三阶行列式的定义，进而通过**逆序数**和**排列**的方式，严谨地定义 n 阶行列式；介绍行列式的基本性质与运算规则；进而重点讨论行列式的多种计算方法，包括三角形化、拉普拉斯展开等；最后，我们将揭示行列式与矩阵可逆性、矩阵秩等重要概念之间的联系，并进一步将其应用于线性方程组的克莱姆法则及矩阵求逆等问题中.

4.1 二阶行列式和三阶行列式

学习目标

一、二阶行列式的定义

二元线性方程组求解公式 设二元线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$，利用初等行变换法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可以得到方程组（1）的唯一解为

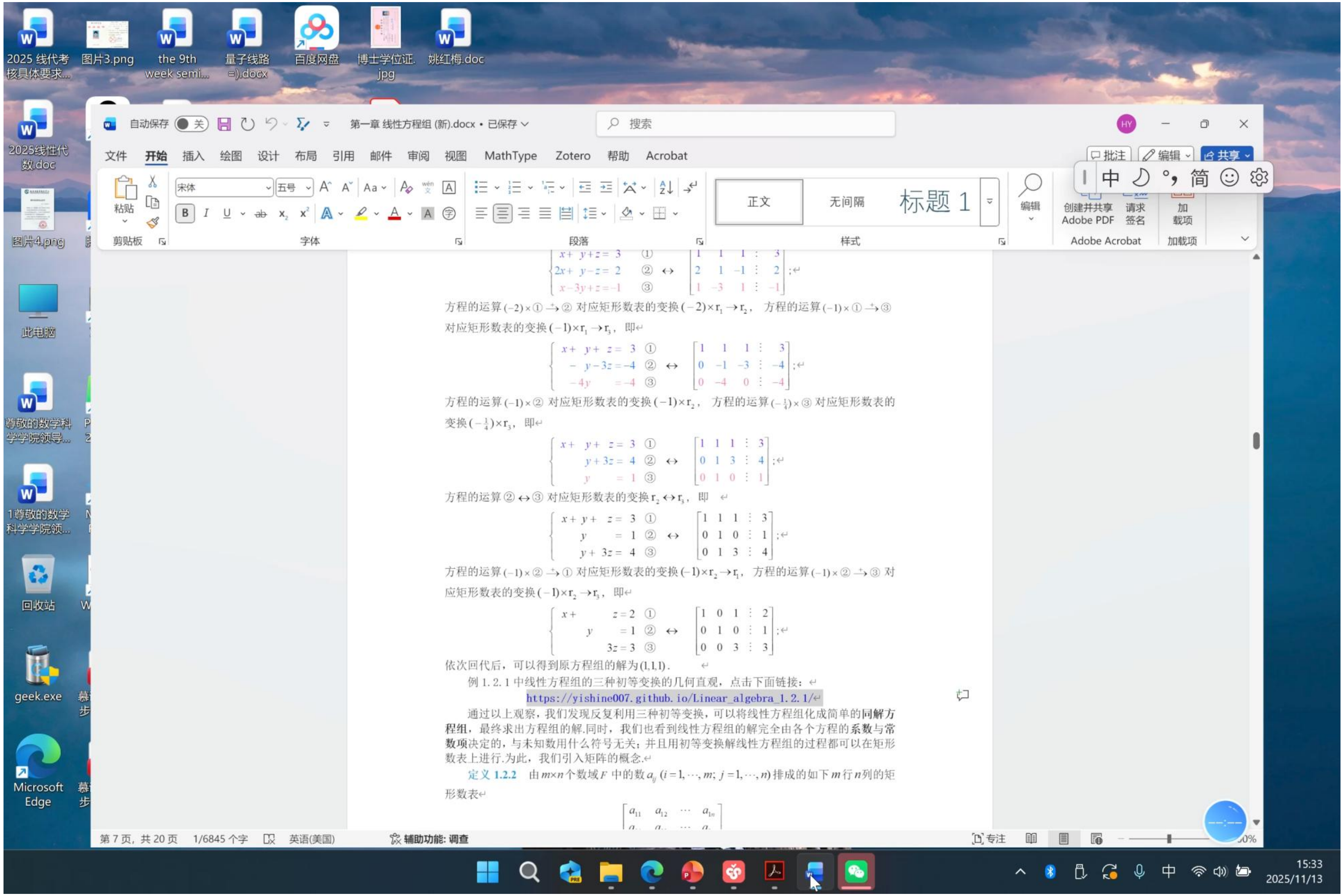
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

观察求解公式（2）的分母，其完全由方程组（1）的系数矩阵决定，是判别方程组（1）解是否存在且唯一的关键. 因此，我们将其定义为矩阵 **A** 的行列式，记为 $\det(\boldsymbol{A})$ 或 $|\boldsymbol{A}|$，即

$$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \text{或} |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

称为**二阶行列式**.

动态几何展式



$$\begin{cases} x+\ \ y+z=\ \ 3 & ① \\ 2x+\ \ y-z=\ \ 2 & ② \\ x-3y+z=-1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix};$$

方程的运算$(-2)\times ① \xrightarrow{+} ②$对应矩形数表的变换$(-2)\times \mathrm{r}_1 \to \mathrm{r}_2$， 方程的运算$(-1)\times ① \xrightarrow{+} ③$对应矩形数表的变换$(-1)\times \mathrm{r}_1 \to \mathrm{r}_3$，即

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=\ \ 3 & ① \\ -\ \ y-3z=-4 & ② \\ -4y\ \ \ \ =-4 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & -4 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & -4 \end{bmatrix};$$

方程的运算$(-1)\times ②$对应矩形数表的变换$(-1)\times \mathrm{r}_2$， 方程的运算$(-\frac{1}{4})\times ③$对应矩形数表的变换$(-\frac{1}{4})\times \mathrm{r}_3$，即

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=\ 3 & ① \\ y+3z=\ 4 & ② \\ y\ \ \ \ =\ 1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix};$$

方程的运算$② \leftrightarrow ③$对应矩形数表的变换$\mathrm{r}_2 \leftrightarrow \mathrm{r}_3$，即

$$\begin{cases} x+y+\ \ z=\ 3 & ① \\ y\ \ \ \ =\ 1 & ② \\ y+\ 3z=\ 4 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \end{bmatrix};$$

方程的运算$(-1)\times ② \xrightarrow{+} ①$对应矩形数表的变换$(-1)\times \mathrm{r}_2 \to \mathrm{r}_1$，方程的运算$(-1)\times ② \xrightarrow{+} ③$对应矩形数表的变换$(-1)\times \mathrm{r}_2 \to \mathrm{r}_3$，即

$$\begin{cases} x+\ \ \ \ z=2 & ① \\ y\ \ \ \ =1 & ② \\ 3z=3 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix};$$

依次回代后，可以得到原方程组的解为(1,1,1).

例 1.2.1 中线性方程组的三种初等变换的几何直观，点击下面链接：

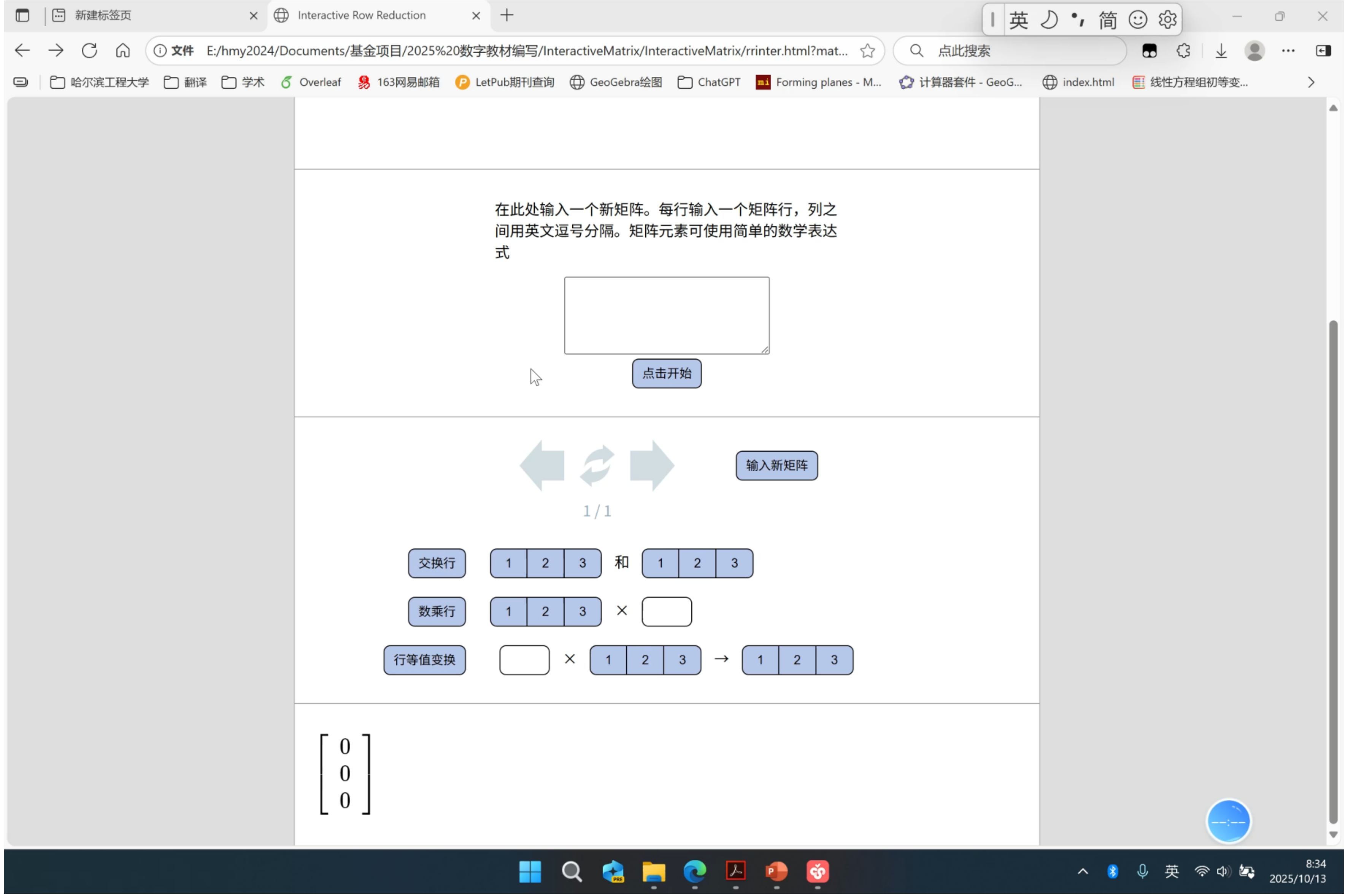
https://yishine007.github.io/Linear_algebra_1.2.1/

通过以上观察，我们发现反复利用三种初等变换，可以将线性方程组化成简单的**同解方程组**，最终求出方程组的解.同时，我们也看到线性方程组的解完全由各个方程的**系数**与**常数项**决定的，与未知数用什么符号无关；并且用初等变换解线性方程组的过程都可以在矩形数表上进行.为此，我们引入矩阵的概念.

定义 1.2.2 由$m\times n$个数域F中的数a_{ij} $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$排成的如下$m$行$n$列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

学生可以动手进行
矩阵行阶梯形计算
矩阵求逆
初等变换解线性方程组



在此处输入一个新矩阵。每行输入一个矩阵行，列之间用英文逗号分隔。矩阵元素可使用简单的数学表达式

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

谢谢

哈尔滨工程大学
1953
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

大工至善 大学至真